UITWERKINGEN | WISKUNDE B | 12e EDITIE | VWO DEEL 4

GETAL & RUIMTE

B

Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen
vwo B deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

© Noordhoff Uitgevers bv

Inhoud

13 Limieten en asymptoten *4*

14 Meetkunde toepassen *38*

15 Afgeleiden en primitieven *75*

16 Examentraining *112*

Gemengde opgaven *150*

© Noordhoff Uitgevers bv

13 Limieten en asymptoten

Voorkennis Limiet en afgeleide

Bladzijde 9

1 **a** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h) - ax}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax + ah - ax}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ah}{h} = \lim\limits_{h \to 0} a = a$

b $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2axh + ah^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2ax + ah)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$

2 **a** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^{x+h} - g^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^x \cdot g^h - g^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^x \cdot (g^h - 1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$

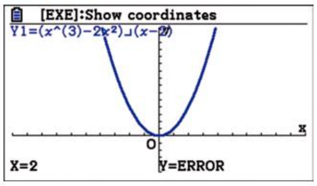
b Uit a volgt $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} \cdot e^x$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, dus $f'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$.

13.1 Limieten en perforaties

Bladzijde 10

1 **a**



b $f(1) = 1, f(1{,}9) = 3{,}61, f(1{,}99) = 3{,}9601, f(2{,}01) = 4{,}0401$

c $f(2) = \dfrac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ en dat is onbepaald.

Bladzijde 11

2 **a** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \dfrac{(-3)^2 - 3 - 6}{-3 - 2} = \dfrac{0}{-5} = 0$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{0 + 0 + 12}{0 + 0 + 6} = \dfrac{12}{6} = 2$

c $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 4}{x + 2} = \dfrac{2}{0}$ en dat is onbepaald, dus $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$ bestaat niet.

Bladzijde 12

3 **a** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 1) = 4$

b $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} (x - 1) = -4$

c $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

d $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{-3}{1} = -3$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 a $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-3)=-1$

b $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=8$

c $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{0}{8}=0$

d $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3}=\frac{2}{3}$

5 a $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}(x+5)=10$

b $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+2)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{2}{1}=2$

c $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\dfrac{1-3+2}{1-1-2}=\dfrac{0}{-2}=0$

d $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x^2+x-6)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x+3)}{x-3}=\dfrac{2\cdot5}{-1}=-10$

6 a $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-36}{x-6}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{(x-6)(x+6)}{x-6}=\lim\limits_{x\to6}(x+6)=12$

b $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$

c $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x-5}=\dfrac{25+30+5}{25+20-5}=\dfrac{60}{40}=1\frac{1}{2}$

d $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x-2}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{2}{2}=1$

7 a $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+x-12}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+4)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{-1}{7}=-\frac{1}{7}$

De continumakende waarde van f voor $x=3$ is $-\frac{1}{7}$.

b $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{16x^2-1}{16x-4}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{4(4x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x+1}{4}=\dfrac{2}{4}=\frac{1}{2}$

De continumakende waarde van g voor $x=\frac{1}{4}$ is $\frac{1}{2}$.

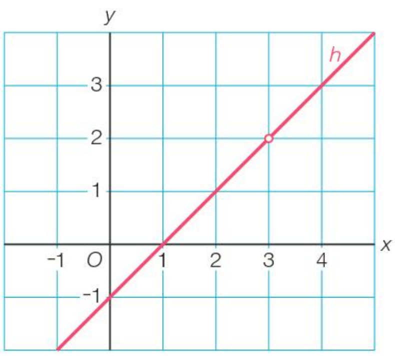
8 a $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+x\sqrt{2}-4}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$

b $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+15x-8}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x+4)}{(2x-1)(x+8)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x+4}{x+8}=\dfrac{4\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}=\frac{9}{17}$

Bladzijde 13

9 $h(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}=x-1$ mits $x\neq3$

$\lim\limits_{x\to3}h(x)=2$, dus de coördinaten van dit ‘gaatje’ zijn (3, 2).



© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 15

10 **a** $f_a(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + a} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -2$ en als $a = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f_{-2}(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+3) = 5$

Voor $a = -2$ is de perforatie $(2, 5)$.

$\lim\limits_{x \to -3} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3}(x-2) = -5$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-3, -5)$.

b $f_a(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x + a} = \dfrac{(x-4)(x+5)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -4$ en als $a = 5$.

$\lim\limits_{x \to 4} f_{-4}(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x+5)}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4}(x+5) = 9$

Voor $a = -4$ is de perforatie $(4, 9)$.

$\lim\limits_{x \to -5} f_5(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{(x-4)(x+5)}{x+5} = \lim\limits_{x \to -5}(x-4) = -9$

Voor $a = 5$ is de perforatie $(-5, -9)$.

c $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + a} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -3$ en als $a = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(3, 6)$.

$\lim\limits_{x \to -3} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3}(x-3) = -6$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-3, -6)$.

11 **a** $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 4\frac{1}{2}x + 2}{x + a} = \dfrac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -4$ en als $a = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 4} f_{-4}(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4}(x-\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2}$

Voor $a = -4$ is de perforatie $(4, 3\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f_{-\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(x-4) = -3\frac{1}{2}$

Voor $a = -\frac{1}{2}$ is de perforatie $(\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

b $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 3x\sqrt{2} + 4}{x + a} = \dfrac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -\sqrt{2}$ en als $a = -2\sqrt{2}$.

$\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f_{-\sqrt{2}}(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}}(x-2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$

Voor $a = -\sqrt{2}$ is de perforatie $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$\lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}} f_{-2\sqrt{2}}(x) = \lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}} \dfrac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x-2\sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Voor $a = -2\sqrt{2}$ is de perforatie $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x + a} = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{2x+a} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a = 2$ en als $a = -3$.

$\lim\limits_{x \to -1} f_2(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x+2} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{2}(2x-3) = \frac{1}{2}(-2-3) = -2\frac{1}{2}$

Voor $a = 2$ is de perforatie $(-1, -2\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x-3} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{2}(3+2) = 2\frac{1}{2}$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

12 **a** $f_a(x) = \dfrac{9x^2 + 6x - 8}{3x + a} = \dfrac{(3x-2)(3x+4)}{3x+a}$

Er is een perforatie als $a = -2$ en als $a = 4$.

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f_{-2}(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{(3x-2)(3x+4)}{3x-2} = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} (3x+4) = 2 + 4 = 6$

Voor $a = -2$ is de perforatie $(\frac{2}{3}, 6)$.

$\lim\limits_{x \to -1\frac{1}{3}} f_4(x) = \lim\limits_{x \to -1\frac{1}{3}} \dfrac{(3x-2)(3x+4)}{3x+4} = \lim\limits_{x \to -1\frac{1}{3}} (3x-2) = -4 - 2 = -6$

Voor $a = 4$ is de perforatie $(-1\frac{1}{3}, -6)$.

b $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x + a} = \dfrac{(2x+3)(2x-5)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a = 3$ en als $a = -5$.

$\lim\limits_{x \to -1\frac{1}{2}} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x+3)(2x-5)}{2x+3} = \lim\limits_{x \to -1\frac{1}{2}} (2x-5) = -3 - 5 = -8$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-1\frac{1}{2}, -8)$.

$\lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} \dfrac{(2x+3)(2x-5)}{2x-5} = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} (2x+3) = 5 + 3 = 8$

Voor $a = -5$ is de perforatie $(2\frac{1}{2}, 8)$.

c $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{2x + a} = \dfrac{(x-3)(2x-5)}{2x+a} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a = -6$ en als $a = -5$.

$\lim\limits_{x \to 3} f_{-6}(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x-6} = \lim\limits_{x \to 3} (\frac{1}{2}(2x-5)) = \frac{1}{2}(6-5) = \frac{1}{2}$

Voor $a = -6$ is de perforatie $(3, \frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x-5} = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}(2x-6)) = \frac{1}{2}(5-6) = -\frac{1}{2}$

Voor $a = -5$ is de perforatie $(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

13 Voor een perforatie mag de functiewaarde niet bestaan. Dat is alleen het geval als de noemer gelijk is aan nul. Maar als de teller voor een nulpunt van de noemer ongelijk is aan nul, dan bestaat de limiet van $f(x)$ niet. De enige mogelijkheden voor een perforatie is er dus als de teller hetzelfde nulpunt heeft als de noemer. Je moet nog wel controleren of de limiet van $f(x)$ bestaat.

14 $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x - a} = \dfrac{(x-a)(x-3a)}{x-a}$

$\lim\limits_{x \to a} f_a(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)(x-3a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} (x-3a) = -2a$

De perforatie is $(a, -2a)$.

$(a, -2a)$ op de lijn $y = x - 3$ geeft $a - 3 = -2a$

$3a = 3$

$a = 1$

Bladzijde 16

15 **a** $f_a(x) = \dfrac{2x^2 + x - 10}{2x + a} = \dfrac{(2x + 5)(x - 2)}{2x + a} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x + a}$

Er is een perforatie als $a = 5$ en als $a = -4$.

$\lim\limits_{x \to -2\frac{1}{2}} f_5(x) = \lim\limits_{x \to -2\frac{1}{2}} \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to -2\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}(2x - 4)) = \frac{1}{2}(-5 - 4) = -4\frac{1}{2}$

Dus voor $a = 5$ is de perforatie $(-2\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x \to 2} f_{-4}(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x - 4} = \lim\limits_{x \to 2} (\frac{1}{2}(2x + 5)) = \frac{1}{2}(4 + 5) = 4\frac{1}{2}$

Dus voor $a = -4$ is de perforatie $(2, 4\frac{1}{2})$.

b $f_a(x) = \dfrac{2x^2 + x - 10}{2x + a}$ geeft

$f_a'(x) = \dfrac{(2x + a) \cdot (4x + 1) - (2x^2 + x - 10) \cdot 2}{(2x + a)^2} = \dfrac{8x^2 + 2x + 4ax + a - 4x^2 - 2x + 20}{(2x + a)^2} = \dfrac{4x^2 + 4ax + a + 20}{(2x + a)^2}$

$f_a'(-1) = 0$ geeft $\dfrac{4 - 4a + a + 20}{(-2 + a)^2} = 0$

$4 - 4a + a + 20 = 0$

$-3a = -24$

$a = 8$

$f_8(x) = \dfrac{2x^2 + x - 10}{2x + 8}$ en $f_8'(x) = \dfrac{4x^2 + 32x + 28}{(2x + 8)^2}$

$f_8'(x) = 0$ geeft $4x^2 + 32x + 28 = 0$

$x^2 + 8x + 7 = 0$

$(x + 1)(x + 7) = 0$

$x = -1 \vee x = -7$

$f_8(-7) = \dfrac{2 \cdot 49 - 7 - 10}{-14 + 8} = \dfrac{81}{-6} = -13\frac{1}{2}$

De coördinaten van de andere top zijn $(-7, -13\frac{1}{2})$.

16 $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 14ax + 6a^2}{2x - a} = \dfrac{(2x - a)(2x - 6a)}{2x - a}$

Voor elke waarde van a is er een perforatie als $x = \frac{1}{2}a$.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}a} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}a} \dfrac{(2x - a)(2x - 6a)}{2x - a} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}a} (2x - 6a) = a - 6a = -5a$

De perforatie is $(\frac{1}{2}a, -5a)$.

$(\frac{1}{2}a, -5a)$ op $y = -2x^2 + 12$ geeft $-2 \cdot \frac{1}{4}a^2 + 12 = -5a$

$-\frac{1}{2}a^2 + 5a + 12 = 0$

$a^2 - 10a - 24 = 0$

$(a + 2)(a - 12) = 0$

$a = -2 \vee a = 12$

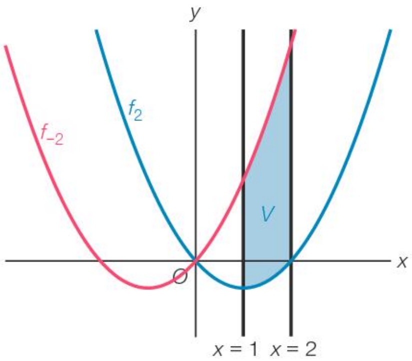
© Noordhoff Uitgevers bv

17 $f_a(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x + a} = \dfrac{x(x^2 - 4)}{x + a} = \dfrac{x(x-2)(x+2)}{x + a}$

Er is een perforatie als $a = 0$ (vold. niet), $a = -2$ en $a = 2$.

$f_{-2}(x) = \dfrac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = x(x+2) = x^2 + 2x$ mits $x \neq 2$

$f_2(x) = \dfrac{x(x-2)(x+2)}{x+2} = x(x-2) = x^2 - 2x$ mits $x \neq -2$

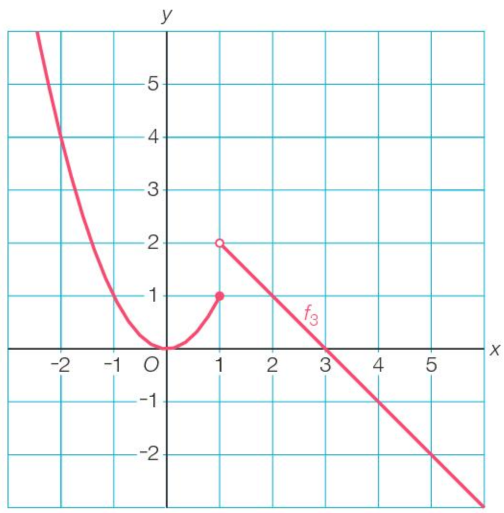


$$O(V) = \int_1^2 (f_{-2}(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2 + 2x - (x^2 - 2x))\,\mathrm{d}x = \int_1^2 4x\,\mathrm{d}x = \left[2x^2\right]_1^2 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6$$

13.2 Sprongen en knikken in grafieken

Bladzijde 18

18 **a** $f_3(x) = \begin{cases} x^2 \text{ voor } x \leq 1 \\ -x + 3 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$



b Nee, de grafiek van f_3 is geen ononderbroken kromme.

c Voor $p = 2$ is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme.

Bladzijde 19

19 **a** $\lim\limits_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1} 2^{x-p} = 2^{1-p}$

$\lim\limits_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} (x^2 + 7) = 1 + 7 = 8$

$\lim\limits_{x \to 1} f_p(x)$ bestaat als $2^{1-p} = 8$

$1 - p = 3$

$p = -2$

b $\lim\limits_{x\uparrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\uparrow 1} e^{x+p} = e^{1+p}$

$\lim\limits_{x\downarrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\downarrow 1}(x+3) = 1+3 = 4$

$\lim\limits_{x\to 1} f_p(x)$ bestaat als $e^{1+p} = 4$

$1 + p = \ln(4)$

$p = -1 + \ln(4)$

c $\lim\limits_{x\uparrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\uparrow 1} \ln(x+p) = \ln(1+p)$

$\lim\limits_{x\downarrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\downarrow 1}(x^2+1) = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 1} f_p(x)$ bestaat als $\ln(1+p) = 2$

$1 + p = e^2$

$p = -1 + e^2$

d $\lim\limits_{x\uparrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\uparrow 1} |px - 2| = |p - 2|$

$\lim\limits_{x\downarrow 1} f_p(x) = \lim\limits_{x\downarrow 1}(x^2+3x) = 1+3 = 4$

$\lim\limits_{x\to 1} f_p(x)$ bestaat als $|p-2| = 4$

$p - 2 = 4 \vee p - 2 = -4$

$p = 6 \vee p = -2$

Bladzijde 20

20 $\lim\limits_{x\uparrow 2} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\uparrow 2}(x^2+p) = 4 + p$

$\lim\limits_{x\downarrow 2} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\downarrow 2}(3x+q) = 6 + q$

$\lim\limits_{x\uparrow 4} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\uparrow 4}(3x+q) = 12 + q$

$\lim\limits_{x\downarrow 4} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\downarrow 4}(-x^2 - px + 11) = -16 - 4p + 11 = -4p - 5$

$\lim\limits_{x\to 2} f_{p,q}(x)$ bestaat als $4 + p = 6 + q$

$p - q = 2$

$\lim\limits_{x\to 4} f_{p,q}(x)$ bestaat als $12 + q = -4p - 5$

$4p + q = -17$

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ \underline{4p + q = -17} \end{cases} +$$

$5p = -15$

$$\left.\begin{matrix} p = -3 \\ p - q = 2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -3 - q = 2 \\ q = -5 \end{matrix}$$

Dus voor $p = -3$ en $q = -5$.

21 $\lim\limits_{x\uparrow \frac{1}{4}} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\uparrow \frac{1}{4}} 4\sin(p\pi x) = 4\sin(\frac{1}{4}\pi p)$

$\lim\limits_{x\downarrow \frac{1}{4}} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\downarrow \frac{1}{4}}(8x^2 + qx + 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q + 2 = \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\uparrow 3} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\uparrow 3}(8x^2 + qx + 2) = 72 + 3q + 2 = 3q + 74$

$\lim\limits_{x\downarrow 3} f_{p,q}(x) = \lim\limits_{x\downarrow 3}(x^4 - 4x - 1) = 81 - 12 - 1 = 68$

$\lim\limits_{x\to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $3q + 74 = 68$

$3q = -6$

$q = -2$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} f_{p,q}(x)$ bestaat als $4\sin(\frac{1}{4}\pi p) = \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2}$

$q = -2$ geeft $4\sin(\frac{1}{4}\pi p) = -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$

$4\sin(\frac{1}{4}\pi p) = 2$

$\sin(\frac{1}{4}\pi p) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\pi p = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{4}\pi p = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$p = \frac{2}{3} + k \cdot 8 \vee p = 3\frac{1}{3} + k \cdot 8$

$0 < p < 5$ geeft $p = \frac{2}{3} \vee p = 3\frac{1}{3}$

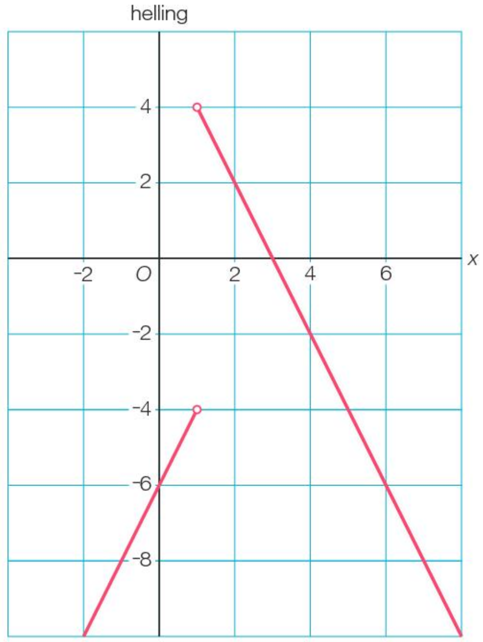
Dus voor $(p = \frac{2}{3} \vee p = 3\frac{1}{3}) \wedge q = -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

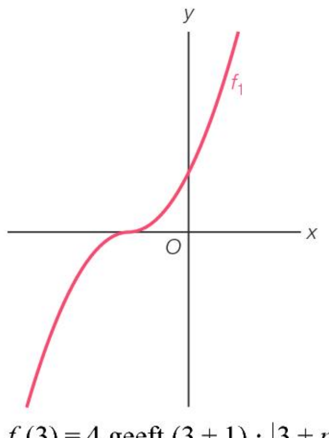
22 **a** Voor $x < 2$ is $f(x) = x \cdot (-x + 2) = -x^2 + 2x$.
b Voor $x \geq 2$ is $f(x) = x \cdot (x - 2) = x^2 - 2x$.
c Voor $x > 2$ is $f'(x) = 2x - 2$.
d $\lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2}(-2x + 2) = -4 + 2 = -2$
$\lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2}(2x - 2) = 4 - 2 = 2$
e $\lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x) \neq \lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x)$, dus $\lim\limits_{x \to 2} f'(x)$ bestaat niet.

Bladzijde 21

23 **a** De notatie $f'(x) = \begin{cases} -2x + 6 \text{ voor } x > 1 \\ 2x - 6 \text{ voor } x < 1 \end{cases}$ is juist, want $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ bestaat niet oftewel $f'(x)$ bestaat niet voor $x = 1$.
b



24 **a** $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \text{ voor } x \geq -1 \\ -x^2 - 2x - 1 \text{ voor } x < -1 \end{cases}$



b $f_p(3) = 4$ geeft $(3 + 1) \cdot |3 + p| = 4$
$|3 + p| = 1$
$3 + p = 1 \vee 3 + p = -1$
$p = -2 \vee p = -4$

Bladzijde 22

25 **a** $f_1(x) = \begin{cases} (2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1 \text{ voor } x \geq 1 \\ (2x+1)(-x+1) = -2x^2 + x + 1 \text{ voor } x < 1 \end{cases}$

Het knikpunt is (1, 0).

$\lim\limits_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1}(-4x+1) = -4+1 = -3$

Dus k: $y = -3x + 3$.

$\lim\limits_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1}(4x-1) = 4-1 = 3$

Dus l: $y = 3x - 3$.

b $f_p(-1) = -3$ geeft $(-2+1) \cdot |-1-p| = -3$
$|-1-p| = 3$
$-1-p = 3 \vee -1-p = -3$
$p = -4 \vee p = 2$

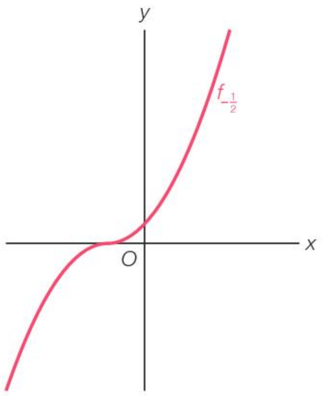
c $f_p(x) = \begin{cases} (2x+1)(x-p) = 2x^2 - 2px + x - p \text{ voor } x \geq p \\ (2x+1)(-x+p) = -2x^2 + 2px - x + p \text{ voor } x < p \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow p}(-4x + 2p - 1) = -4p + 2p - 1 = -2p - 1$

$\lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p}(4x - 2p + 1) = 4p - 2p + 1 = 2p + 1$

Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x)$, dus als $-2p - 1 = 2p + 1$
$-4p = 2$
$p = -\frac{1}{2}$

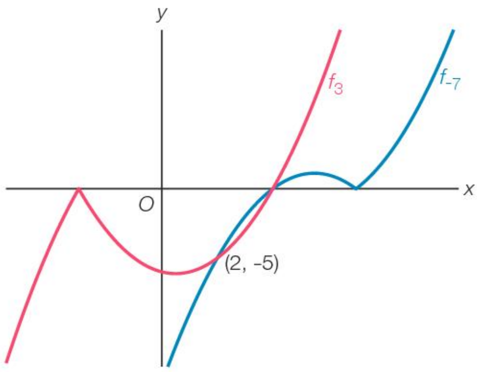
$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} \text{ voor } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x^2 - 2x - \frac{1}{2} \text{ voor } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$



26 **a** $f_p(2) = -5$ geeft $(1-2) \cdot |2+p| = -5$
$|2+p| = 5$
$2+p = 5 \vee 2+p = -5$
$p = 3 \vee p = -7$

$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 6 \text{ voor } x \geq -3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 \text{ voor } x < -3 \end{cases}$

$f_{-7}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 5\frac{1}{2}x + 14 \text{ voor } x \geq 7 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5\frac{1}{2}x - 14 \text{ voor } x < 7 \end{cases}$



© Noordhoff Uitgevers bv

b $f_p(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x - 2)(x + p) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}px - 2x - 2p \text{ voor } x \geq -p \\ (\frac{1}{2}x - 2)(-x - p) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}px + 2x + 2p \text{ voor } x < -p \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -p} (-x - \frac{1}{2}p + 2) = p - \frac{1}{2}p + 2 = \frac{1}{2}p + 2$

$\lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p} (x + \frac{1}{2}p - 2) = -p + \frac{1}{2}p - 2 = -\frac{1}{2}p - 2$

Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x)$, dus als $\frac{1}{2}p + 2 = -\frac{1}{2}p - 2$

$p = -4$

c $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 8 \text{ voor } x \geq -4 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 8 \text{ voor } x < -4 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow -4} f_4'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -4} -x = 4$, dus $\text{rc}_k = 4$.

$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = 4$, dus $\alpha = 75{,}9...°$.

$\lim\limits_{x \downarrow -4} f_4'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -4} x = -4$, dus $\text{rc}_l = -4$.

$\text{rc}_l = \tan(\beta) = -4$, dus $\beta = -75{,}9...°$.

$\alpha - \beta = 75{,}9...° - -75{,}9...° \approx 152°$

Dus $\angle(k, l) \approx 180° - 152° = 28°$.

d Zie b.

$\text{rc}_k = \frac{1}{2}p + 2$ en $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}p - 2$

$k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$(\frac{1}{2}p + 2)(-\frac{1}{2}p - 2) = -1$

$(\frac{1}{2}p + 2)(\frac{1}{2}p + 2) = 1$

$\frac{1}{4}p^2 + 2p + 4 = 1$

$\frac{1}{4}p^2 + 2p + 3 = 0$

$p^2 + 8p + 12 = 0$

$(p + 2)(p + 6) = 0$

$p = -2 \vee p = -6$

27 **a** $f_p(x) = \begin{cases} (x - p)\ln(x) \text{ voor } x \geq p \\ (-x + p)\ln(x) \text{ voor } x < p \end{cases}$

$[(x - p)\ln(x)]' = 1 \cdot \ln(x) + (x - p) \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{p}{x}$

$[(-x + p)\ln(x)]' = -1 \cdot \ln(x) + (-x + p) \cdot \frac{1}{x} = -\ln(x) - 1 + \frac{p}{x}$

$\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow p} \left(-\ln(x) - 1 + \frac{p}{x}\right) = -\ln(p) - 1 + \frac{p}{p} = -\ln(p) - 1 + 1 = -\ln(p)$

$\lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p} \left(\ln(x) + 1 - \frac{p}{x}\right) = \ln(p) + 1 - \frac{p}{p} = \ln(p) + 1 - 1 = \ln(p)$

Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x)$, dus als $-\ln(p) = \ln(p)$

$-2\ln(p) = 0$

$\ln(p) = 0$

$p = 1$

b $\lim\limits_{x \uparrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \left(-\ln(x) - 1 + \frac{2}{x}\right) = -\ln(2)$, dus $\text{rc}_k = -\ln(2)$.

$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = -\ln(2)$, dus $\alpha = -34{,}7...°$.

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} \left(\ln(x) + 1 - \frac{2}{x}\right) = \ln(2)$, dus $\text{rc}_l = \ln(2)$.

$\text{rc}_l = \tan(\beta) = \ln(2)$, dus $\beta = 34{,}7...°$.

$\beta - \alpha = 34{,}7...° - -34{,}7...° \approx 69°$

Dus $\angle(k, l) \approx 69°$.

c Zie a.

$\text{rc}_k = -\ln(p)$ en $\text{rc}_l = \ln(p)$

$k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$-\ln(p) \cdot \ln(p) = -1$

$\ln^2(p) = 1$

$\ln(p) = 1 \vee \ln(p) = -1$

$p = \text{e} \vee p = \frac{1}{\text{e}}$

13.3 Asymptoten bij gebroken functies

Bladzijde 24

28 **a** $f(1{,}1) \approx -4$
$f(1{,}01) \approx -49$
$f(1{,}001) \approx -499$

b $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$

c $f(10) \approx 1{,}717$
$f(100) \approx 1{,}970$
$f(1000) \approx 1{,}997$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Bladzijde 26

29 **a** $f(x) = 2$ geeft $\dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = 2$

$$2x^2 - 3x = 2(x^2 - 1)$$
$$2x^2 - 3x = 2x^2 - 2$$
$$-3x = -2$$
$$x = \tfrac{2}{3}$$

Dus het snijpunt is $(\tfrac{2}{3}, 2)$.

b $g(x) = \dfrac{x^2}{x} = x$ mits $x \neq 0$

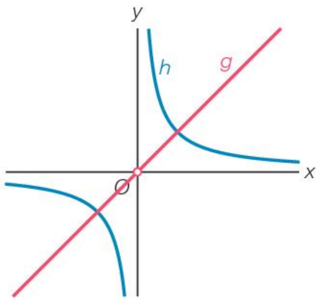
De grafiek van g is de lijn $y = x$ met perforatie $(0, 0)$.

$h(x) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$

noemer $= 0$ geeft $x = 0$, dus de lijn $x = 0$ is verticale asymptoot van de grafiek van h.

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is horizontale asymptoot van de grafiek van h.

De grafiek van h is de hyperbool $y = \dfrac{1}{x}$.



30 **a** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x}{2 - x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2} - 1} = \dfrac{3 - 0}{0 - 1} = -3$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x^3}{2x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{5}{x^3} - 1}{2} = \dfrac{0 - 1}{2} = -\tfrac{1}{2}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2}{2 - x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{6}{x}}{\frac{2}{x^3} - 1} = \dfrac{0}{0 - 1} = 0$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 12x + 9}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{4 - 0 + 0}{1 + 0} = 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)^2}{(2x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-6x+1}{4x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{9-0+0}{4+0+0}=2\frac{1}{4}$

b $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+1}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{1+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\dfrac{-1+0}{0+1}=-1$

c $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|2-x^2|}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+x^2}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{2}{x^2}+1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0+1}{1+0+0}=1$

d $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

32 **a** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4x-1)^2}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16x^2-8x+1}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{16}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}=\dfrac{0-0+0}{1+0}=0$

b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2x+1)^2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(4x^2+4x+1)}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+4x^2+x}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{4+0+0}{1+0}=4$

c $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3-8|}{2x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+8}{2x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\frac{8}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{-1+0}{2+0}=-\frac{1}{2}$

d $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|4x^3|-10}{|x^3-1|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3-10}{-x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4-\frac{10}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{-4-0}{-1+0}=4$

33 **a** $x^2-x-6=0 \wedge 4x^2-1\neq 0$
$(x+2)(x-3)=0 \wedge x^2\neq\frac{1}{4}$
$x=-2 \vee x=3$
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x=-2$ en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-1}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=\dfrac{4-0}{1-0-0}=4$

De horizontale asymptoot is de lijn $y=4$.

b $f(x)=4$ geeft $\dfrac{4x^2-1}{x^2-x-6}=4$
$4x^2-1=4x^2-4x-24$
$4x=-23$
$x=-5\frac{3}{4}$
Dus $A(-5\frac{3}{4}, 4)$.

c $f(x)=4\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{4x^2-1}{x^2-x-6}=\frac{9}{2}$
$9x^2-9x-54=8x^2-2$
$x^2-9x-52=0$
$(x+4)(x-13)=0$
$x=-4 \vee x=13$
$f(x)<4\frac{1}{2}$ geeft $x<-4 \vee -2<x<3 \vee x>13$

Bladzijde 27

34 **a** $x^3 - 4x = 0 \wedge |x^3| \neq 0$
$x(x^2 - 4) = 0 \wedge x^3 \neq 0$
$(x = 0 \vee x^2 = 4) \wedge x \neq 0$
$x = 2 \vee x = -2$
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x^3|}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1$$
Voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 1$.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3|}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{-1}{1-0} = -1$$
Voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -1$.

b $f(x) = 1$ geeft $x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1 \quad \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = 1$

$x > 0 \wedge x^3 = x^3 - 4x$	$x < 0 \wedge -x^3 = x^3 - 4x$
$x > 0 \wedge 4x = 0$	$x < 0 \wedge -2x^3 + 4x = 0$
geen opl.	$x < 0 \wedge -2x(x^2 - 2) = 0$
	$x < 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 2)$
	$x < 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2})$
	$x = -\sqrt{2}$

$f(x) = -1$ geeft $x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = -1 \quad \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = -1$

$x > 0 \wedge x^3 = -x^3 + 4x$	$x < 0 \wedge -x^3 = -x^3 + 4x$
$x > 0 \wedge 2x^3 - 4x = 0$	$x < 0 \vee 4x = 0$
$x > 0 \wedge 2x(x^2 - 2) = 0$	$x < 0 \wedge x = 0$
$x > 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 2)$	geen opl.
$x > 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2})$	
$x = \sqrt{2}$	

Dus $A(-\sqrt{2}, 1)$ en $B(\sqrt{2}, -1)$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = \frac{-1-1}{\sqrt{2} - -\sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x\sqrt{2} + b \\ \text{door } A(-\sqrt{2}, 1) \end{array}\right\} -\tfrac{1}{2} \cdot -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + b = 1$$
$-\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 1$
$1 + b = 1$
$b = 0$
Dus k: $y = -\frac{1}{2}x\sqrt{2}$.

c $f(x) = 1\frac{1}{3}$ geeft $x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \frac{4}{3} \quad \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = \frac{4}{3}$

$x > 0 \wedge 4x^3 - 16x = 3x^3$	$x < 0 \wedge 4x^3 - 16x = -3x^3$
$x > 0 \wedge x^3 - 16x = 0$	$x < 0 \wedge 7x^3 - 16x = 0$
$x > 0 \wedge x(x^2 - 16) = 0$	$x < 0 \wedge x(7x^2 - 16) = 0$
$x > 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 16)$	$x < 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = \frac{16}{7})$
$x > 0 \wedge (x = 0 \vee x = 4 \vee x = -4)$	$x < 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{16}{7}} \vee x = -\sqrt{\frac{16}{7}})$
$x = 4$	$x = -\sqrt{\frac{16}{7}} = -\frac{4}{7}\sqrt{7}$

$f(x) > 1\frac{1}{3}$ geeft $-2 < x < -\frac{4}{7}\sqrt{7} \vee 2 < x < 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

35 **a** $\left.\begin{array}{l} bx^2 - 18 = 0 \\ x = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9b - 18 = 0 \\ b = 2 \end{array}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} bx^2 - 18 = 0 \\ x = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9b - 18 = 0 \\ b = 2 \end{array}$

Dus $b = 2$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+5}{2x^2-18} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{18}{x^2}} = \frac{a+0}{2-0} = \tfrac{1}{2}a$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 6$ geeft $\frac{1}{2}a = 6$, dus $a = 12$.

Dus $a = 12$ en $b = 2$.

b $\left.\begin{array}{l} ax^4 + bx^3 - 2 = 0 \\ x = -2 \end{array}\right\} 16a - 8b - 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} ax^4 + bx^3 - 2 = 0 \\ x = 2 \end{array}\right\} 16a + 8b - 2 = 0$

$\begin{cases} 16a - 8b - 2 = 0 \\ 16a + 8b - 2 = 0 \end{cases}$ $-$

$-16b = 0$

$\left.\begin{array}{l} b = 0 \\ 16a - 8b - 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 16a - 2 = 0 \\ a = \frac{1}{8} \end{array}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 1}{\frac{1}{8}x^4 - 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{8} - \frac{2}{x^4}} = \dfrac{0-0+0}{\frac{1}{8}-0} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is horizontale asymptoot klopt.

Dus $a = \frac{1}{8}$ en $b = 0$.

Bladzijde 28

36 $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

vold. niet

Dus $A(-3, 0)$.

$x^2 - 3x = 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0$

$x(x-3) = 0 \wedge x^2 \neq 9$

$(x = 0 \vee x = 3) \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3$

$x = 0$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

Dus $B(0, 1)$.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2$$

Dus de perforatie is $(3, 2)$.

Stel k: $y = ax + 1$ met $a = \dfrac{1-0}{0--3} = \frac{1}{3}$.

Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 1$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = \frac{1}{3}x + 1 \\ \text{door } (3, 2)? \end{array}\right\} \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = 2$ klopt.

Dus de lijn k gaat door de perforatie van de grafiek van f.

37 $2\sin(x) + 1 = 0 \wedge \cos(x) \neq 0$
$2\sin(x) = -1 \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$\sin(x) = -\frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$(x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi) \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.
$f(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$, dus $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Dus $A(\frac{1}{2}\pi, 0)$.
$f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sin(x) + 1}$ geeft
$$f'(x) = \frac{(2\sin(x) + 1) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 1)^2} = \frac{-2\sin^2(x) - \sin(x) - 2\cos^2(x)}{(2\sin(x) + 1)^2} = \frac{-2 - \sin(x)}{(2\sin(x) + 1)^2}$$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{-2 - 1}{(2 + 1)^2} = -\frac{1}{3}$.
$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}\pi, 0) \end{array}\right\} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0$$
$b = \frac{1}{6}\pi$
Dus k: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\pi$.
$x = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $y = -\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{2}{9}\pi$
$x = 1\frac{5}{6}\pi$ geeft $y = -\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{4}{9}\pi$
Dus $B(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{2}{9}\pi)$ en $C(1\frac{5}{6}\pi, -\frac{4}{9}\pi)$.

38 **a** $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1}$ geeft
$$f'(x) = \frac{(\cos(x) + 1) \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x) - \cos^2(x) \cdot -\sin(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$
$$= \frac{-2\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos^2(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$
$$= \frac{-\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$
$f'(x) = 0$ geeft $-\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$-\sin(x)\cos(x)(\cos(x) + 2) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = -2$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot \pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi$ (vold. niet) $\vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 2\pi$
max. is $f(0) = \frac{1}{2}$
min. is $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$
min. is $f(1\frac{1}{2}\pi) = 0$
max. is $f(2\pi) = \frac{1}{2}$

b $\cos(x) + 1 = 0 \wedge \cos^2(x) \neq 0$ met x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = \pi$.
$f(x) = \frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1} = \frac{1}{2}$
$2\cos^2(x) = \cos(x) + 1$
$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$
Stel $\cos(x) = u$.
$2u^2 - u - 1 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
$u = \dfrac{1 + 3}{4} = 1 \vee u = \dfrac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$
$\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$
$x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 2\pi$
Dus $A(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2})$ en de afstand van A tot de lijn $x = \pi$ is $\frac{1}{3}\pi$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

39 **a** $x = \pi$ geeft $\sqrt{3} - 2\sin(a\pi) = 0 \wedge \cos(a\pi) \neq 0$

$2\sin(a\pi) = \sqrt{3} \wedge a\pi \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\sin(a\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$

$(a\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee a\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi) \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$

$(a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \vee a = \frac{2}{3} + k \cdot 2) \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$

$a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \vee a = \frac{2}{3} + k \cdot 2$

$0 < a < 1$ geeft $a = \frac{1}{3} \vee a = \frac{2}{3}$

b Voor een perforatie moet gelden $\cos(ax) = 0 \wedge \sqrt{3} - 2\sin(ax) = 0$

$ax = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge \sin(ax) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$ax = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge (ax = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee ax = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi)$

Er bestaat geen waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.

40 teller = 0 geeft $4\sin(x) - 2 = 0$

$4\sin(x) = 2$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

noemer = 0 geeft $4\cos^2(x) - 3 = 0$

$4\cos^2(x) = 3$

$\cos^2(x) = \frac{3}{4}$

$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

$$f(x) = \frac{4\sin(x) - 2}{4\cos^2(x) - 3} = \frac{4\sin(x) - 2}{4(1 - \sin^2(x)) - 3} = \frac{4\sin(x) - 2}{1 - 4\sin^2(x)} = \frac{-2(1 - 2\sin(x))}{(1 + 2\sin(x))(1 - 2\sin(x))}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{6}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{6}\pi} \frac{-2(1 - 2\sin(x))}{(1 + 2\sin(x))(1 - 2\sin(x))} = \lim_{x \to \frac{1}{6}\pi} \frac{-2}{1 + 2\sin(x)} = \frac{-2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{x \to \frac{5}{6}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{5}{6}\pi} \frac{-2(1 - 2\sin(x))}{(1 + 2\sin(x))(1 - 2\sin(x))} = \lim_{x \to \frac{5}{6}\pi} \frac{-2}{1 + 2\sin(x)} = \frac{-2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

De perforaties zijn de punten $(\frac{1}{6}\pi, -1)$ en $(\frac{5}{6}\pi, -1)$.

Bladzijde 29

41 **a** $\lim_{x \to \infty} \frac{4}{x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$ en $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$

Dus de grafiek van f nadert de lijn $y = x + 3$ onbeperkt voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$.

b $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$

Dus de grafiek van s nadert de grafiek van g onbeperkt voor $x \to \infty$.

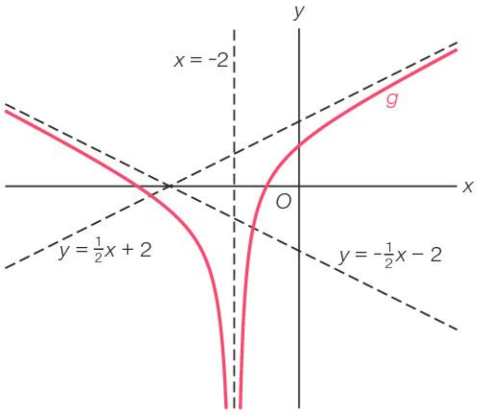
Bladzijde 30

42 **a** Voor $x < 2$ is $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{-2x - 4} = \frac{-\frac{1}{2}x(-2x - 4) - 2x + 6x + 5}{-2x - 4} = -\frac{1}{2}x + \frac{4x + 5}{-2x - 4}$

$= -\frac{1}{2}x + \frac{-2(-2x - 4) - 8 + 5}{-2x - 4} = -\frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2x + 4}$

b De scheve asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}x + 2$ en $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

c



Bladzijde 31

43 **a** $x-1=0 \wedge 2x^2+4x-5 \neq 0$

$x=1 \wedge 2x^2+4x-5 \neq 0$

$x=1$

De verticale asymptoot is de lijn $x=1$.

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-5}{x-1}=\frac{2x(x-1)+2x+4x-5}{x-1}=2x+\frac{6x-5}{x-1}=2x+\frac{6(x-1)+6-5}{x-1}=2x+6+\frac{1}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y=2x+6$.

b $2x-1=0 \wedge -x^2+3x-2 \neq 0$

$2x=1 \wedge -x^2+3x-2 \neq 0$

$x=\frac{1}{2} \wedge -x^2+3x-2 \neq 0$

$x=\frac{1}{2}$

De verticale asymptoot is de lijn $x=\frac{1}{2}$.

$$g(x)=\frac{-x^2+3x-2}{2x-1}=\frac{-\frac{1}{2}x(2x-1)-\frac{1}{2}x+3x-2}{2x-1}=-\frac{1}{2}x+\frac{2\frac{1}{2}x-2}{2x-1}=-\frac{1}{2}x+\frac{1\frac{1}{4}(2x-1)+1\frac{1}{4}-2}{2x-1}$$

$$=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{4}}{2x-1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{4}}{2x-1}=0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{4}$.

c $x^2-9=0 \wedge x^3+3x^2-9x+31 \neq 0$

$x^2=9 \wedge x^3+3x^2-9x+31 \neq 0$

$(x=3 \vee x=-3) \wedge x^3+3x^2-9x+31 \neq 0$

$x=3 \vee x=-3$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x=3$ en $x=-3$.

$$h(x)=\frac{x^3+3x^2-9x+31}{x^2-9}=\frac{x(x^2-9)+9x+3x^2-9x+31}{x^2-9}=x+\frac{3x^2+31}{x^2-9}=x+\frac{3(x^2-9)+27+31}{x^2-9}$$

$$=x+3+\frac{58}{x^2-9}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{58}{x^2-9}=0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y=x+3$.

d $x^2-1=0 \wedge x^3-1 \neq 0$

$x^2=1 \wedge x^3 \neq 1$

$(x=1 \vee x=-1) \wedge x \neq 1$

$x=-1$

De verticale asymptoot is de lijn $x=-1$.

$$j(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x-1}{x^2-1}=x+\frac{x-1}{x^2-1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0}=0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y=x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

44 **a** $x + 2 = 0 \wedge x^2 - x - 2 \neq 0$

$x = -2$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2} = \dfrac{x(x + 2) - 2x - x - 2}{x + 2} = x + \dfrac{-3x - 2}{x + 2} = x + \dfrac{-3(x + 2) + 6 - 2}{x + 2} = x - 3 + \dfrac{4}{x + 2}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x - 3$.

b $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x + 2} = x - 3 + 4(x + 2)^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4(x + 2)^{-2} = 1 - \dfrac{4}{(x + 2)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \dfrac{4}{(x + 2)^2} = 0$

$\dfrac{4}{(x + 2)^2} = 1$

$(x + 2)^2 = 4$

$x + 2 = 2 \vee x + 2 = -2$

$x = 0 \vee x = -4$

max. is $f(-4) = -9$ en min. is $f(0) = -1$

c $f(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$

$f(x) \leq 0$ geeft $x < -2 \vee -1 \leq x \leq 2$

45 **a** $|x| = 0 \wedge x^2 + 3x + 2 \neq 0$

$x = 0$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

Voor $x > 0$ is $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x} = x + 3 + \dfrac{2}{x}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 0$, dus de lijn $y = x + 3$ is scheve asymptoot.

Voor $x < 0$ is $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{-x} = -x - 3 - \dfrac{2}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, dus de lijn $y = -x - 3$ is scheve asymptoot.

b Voor $x > 0$ is $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x} = x + 3 + 2x^{-1}$ en $f'(x) = 1 - 2x^{-2} = 1 - \dfrac{2}{x^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \dfrac{2}{x^2} = 0$

$\dfrac{2}{x^2} = 1$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

vold. niet

Voor $x < 0$ is $f(x) = -x - 3 - \dfrac{2}{x} = -x - 3 - 2x^{-1}$ en $f'(x) = -1 + 2x^{-2} = -1 + \dfrac{2}{x^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $-1 + \dfrac{2}{x^2} = 0$

$\dfrac{2}{x^2} = 1$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

vold. niet

min. is $f(-\sqrt{2}) = \dfrac{4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$ en min. is $f(\sqrt{2}) = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 3$

c Voor $x < 0$ geldt $f(x) = 6$ geeft $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{-x} = 6$

$$x^2 + 3x + 2 = -6x$$
$$x^2 + 9x + 2 = 0$$
$$D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 73$$
$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2} = -4\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{73} \vee x = -4\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{73}$$

Voor $x > 0$ geldt $f(x) = 6$ geeft $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x} = 6$

$$x^2 + 3x + 2 = 6x$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x - 1)(x - 2) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 2$$

$f(x) \leq 6$ geeft $-4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{73} \leq x \leq -4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{73} \vee 1 \leq x \leq 2$

46 **a** $f_2(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + 2} = \dfrac{x(4x + 2) - 2x - 9x - 9}{4x + 2} = x + \dfrac{-11x - 9}{4x + 2} = x + \dfrac{-\frac{11}{4}(4x + 2) + 5\frac{1}{2} - 9}{4x + 2}$

$= x - 2\frac{3}{4} - \dfrac{3\frac{1}{2}}{4x + 2}$

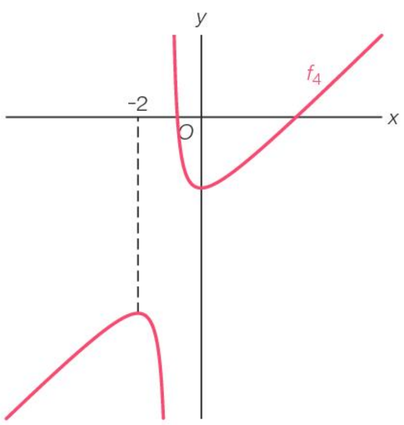
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3\frac{1}{2}}{4x + 2} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x - 2\frac{3}{4}$.

b $f_4(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + 4}$ geeft

$f_4'(x) = \dfrac{(4x + 4) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + 4)^2} = \dfrac{32x^2 - 36x + 32x - 36 - 16x^2 + 36x + 36}{(4x + 4)^2} = \dfrac{16x^2 + 32x}{(4x + 4)^2}$

$f_4'(x) = 0$ geeft $16x^2 + 32x = 0$

$$16x(x + 2) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -2$$



max. is $f_4(-2) = -6\frac{1}{4}$ en min. is $f_4(0) = -2\frac{1}{4}$

c $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a} = \dfrac{(x - 3)(4x + 3)}{4x + a} = \dfrac{\frac{1}{4}(4x - 12)(4x + 3)}{4x + a}$

Er is een perforatie als $a = -12$ en als $a = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3} f_{-12}(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{1}{4}(4x - 12)(4x + 3)}{4x - 12} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{4}(4x + 3) = 3\frac{3}{4}$

Dus voor $a = -12$ is de perforatie $(3, 3\frac{3}{4})$.

$\lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} f_3(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \dfrac{\frac{1}{4}(4x - 12)(4x + 3)}{4x + 3} = \lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \frac{1}{4}(4x - 12) = \lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} (x - 3) = -3\frac{3}{4}$

Dus voor $a = 3$ is de perforatie $(-\frac{3}{4}, -3\frac{3}{4})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

47 $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{(4x + a) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + a)^2}$

$f_a'(1) = 0$ geeft $(4 + a) \cdot (8 - 9) - (4 - 9 - 9) \cdot 4 = 0$

$-4 - a + 56 = 0$

$a = 52$

$f_{52}'(x) = \dfrac{(4x + 52) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + 52)^2}$

$f_{52}'(x) = 0$ geeft $(4x + 52) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4 = 0$

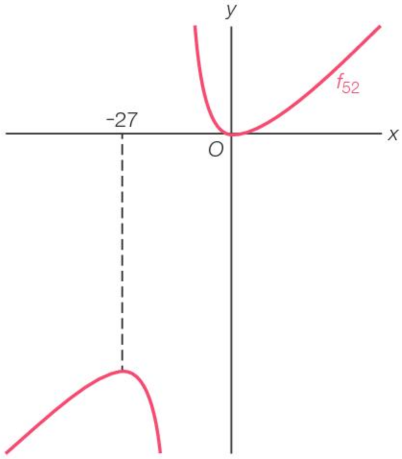
$32x^2 - 36x + 416x - 468 - 16x^2 + 36x + 36 = 0$

$16x^2 + 416x - 432 = 0$

$x^2 + 26x - 27 = 0$

$(x - 1)(x + 27) = 0$

$x = 1 \vee x = -27$



max. is $f_{52}(-27) = -56\frac{1}{4}$

Bladzijde 32

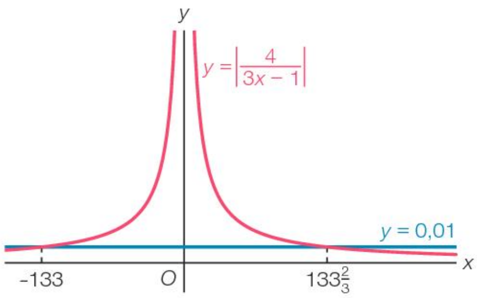
48 **a** $f_0(x) = \dfrac{3x^2 + 11x}{3x - 1} = \dfrac{x(3x - 1) + x + 11x}{3x - 1} = x + \dfrac{12x}{3x - 1} = x + \dfrac{4(3x - 1) + 4}{3x - 1} = x + 4 + \dfrac{4}{3x - 1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{3x - 1} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn k: $y = x + 4$.

$|f_0(x) - (x + 4)| < 0{,}01$ geeft $\left|x + 4 + \dfrac{4}{3x - 1} - x - 4\right| < 0{,}01$ oftewel $\left|\dfrac{4}{3x - 1}\right| < 0{,}01$.

Voer in $y_1 = \left|\dfrac{4}{3x - 1}\right|$ en $y_2 = 0{,}01$.

De optie snijpunt geeft $x = -133$ en $x = 133\frac{2}{3}$.



$|f_0(x) - (x + 4)| < 0{,}01$ geeft $x < -133 \vee x > 133\frac{2}{3}$

b $f_a(x) = \dfrac{(3x-1)(x-a)}{3x-1} = \dfrac{3x^2 - 3ax - x + a}{3x-1} = \dfrac{3x^2 + (-3a-1)x + a}{3x-1}$

Dus $-3a - 1 = 11$

$-3a = 12$

$a = -4$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f_{-4}(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 11x - 4}{3x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{(3x-1)(x+4)}{3x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} (x+4) = 4\frac{1}{3}$

Dus de perforatie is het punt $(\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3})$.

49 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 + x - 6} = \dfrac{x(x^2 - 6x + 8)}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-4)}{x+3} = \dfrac{2(2-4)}{2+3} = -\frac{4}{5}$

Dus de perforatie is $A(2, -\frac{4}{5})$.

$(x-2)(x+3) = 0 \wedge x(x-2)(x-4) \neq 0$

$(x = 2 \vee x = -3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4$

$x = -3$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

$f(x) = \dfrac{x(x-4)}{x+3} = \dfrac{x^2 - 4x}{x+3} = \dfrac{x(x+3) - 3x - 4x}{x+3} = x - \dfrac{7x}{x+3} = x - \dfrac{7(x+3) - 21}{x+3} = x - 7 + \dfrac{21}{x+3}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{21}{x+3} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x - 7$.

$\left.\begin{array}{l} y = x - 7 \\ x = -3 \end{array}\right\} y = -3 - 7 = -10$

Dus $B(-3, -10)$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{-\frac{4}{5} - -10}{2 - -3} = \frac{46}{25}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{46}{25}x + b \\ \text{door } B(-3, -10) \end{array}\right\} \frac{46}{25} \cdot -3 + b = -10$

$-\frac{138}{25} + b = -10$

$b = -4\frac{12}{25}$

Dus k: $y = 1\frac{21}{25}x - 4\frac{12}{25}$ en het snijpunt met de y-as is $C(0, -4\frac{12}{25})$.

b $g(x) = \dfrac{x(x-4)}{x+3} = \dfrac{x^2 - 4x}{x+3}$ geeft

$g'(x) = \dfrac{(x+3)(2x-4) - (x^2 - 4x) \cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x + 6x - 12 - x^2 + 4x}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2 + 6x - 12}{(x+3)^2}$

De helling in A is $g'(2) = \dfrac{4 + 12 - 12}{5^2} = \frac{4}{25}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -6\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(2, -\frac{4}{5}) \end{array}\right\} -6\frac{1}{4} \cdot 2 + b = -\frac{4}{5}$

$-12\frac{1}{2} + b = -\frac{4}{5}$

$b = 11\frac{7}{10}$

Dus l: $y = -6\frac{1}{4}x + 11\frac{7}{10}$ en $D(0, 11\frac{7}{10})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

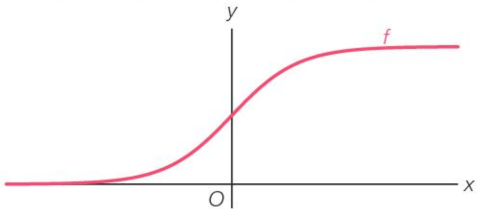
13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

Bladzijde 34

50 **a**

x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$	0,01	0,28	3	5,72	5,99

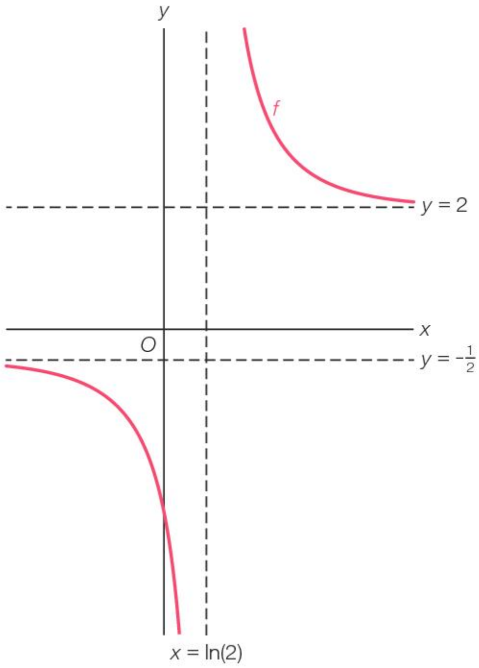
b



c De lijnen $y = 0$ en $y = 6$.

Bladzijde 35

51 **a**



b Voor $x \to \infty$ krijg je $y = 3x - 4 + 2$, dus $y = 3x - 2$.
Voor $x \to -\infty$ krijg je $y = 3x - 4 - \frac{1}{2}$, dus $y = 3x - 4\frac{1}{2}$.

52 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}(10 - 4 \cdot (\frac{1}{2})^x) = 10 - 4 \cdot 0 = 10$

b $\lim\limits_{x\to\infty}(2 + 4\,e^{-x}) = 2 + 4 \cdot 0 = 2$

c $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x - 3}{e^x + 2} = \dfrac{0-3}{0+2} = -1\frac{1}{2}$

d $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2 \cdot 3^x + 1}{3 \cdot 2^x + 1} = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{3 \cdot 0 + 1} = 1$

e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\,e^x - 3}{2 - e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4 - \dfrac{3}{e^x}}{\dfrac{2}{e^x} - 1} = \dfrac{4-0}{0-1} = -4$

f $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x + 16}{4^x - 1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^x}{4^x} + \dfrac{16}{4^x}}{1 - \dfrac{1}{4^x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^x + \dfrac{16}{4^x}}{1 - \dfrac{1}{4^x}} = \dfrac{0+0}{1-0} = 0$

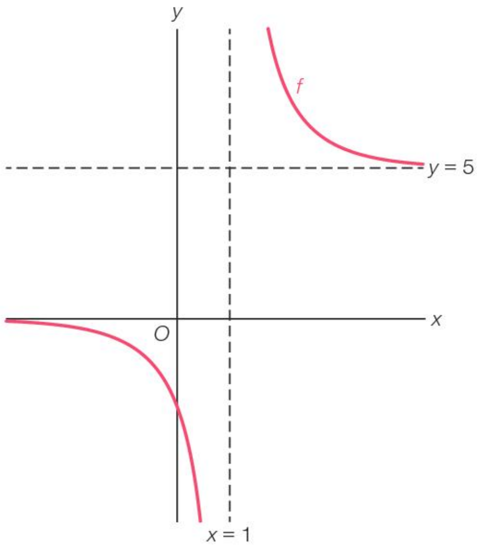
Bladzijde 36

53 **a** $e^x - e = 0 \wedge 5\,e^x \neq 0$
$e^x = e^1$
$x = 1$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5\,e^x}{e^x - e} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{1 - \frac{e}{e^x}} = \frac{5}{1-0} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\,e^x}{e^x - e} = \frac{0}{0-e} = 0$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 5$ en $y = 0$.



b Voor $0 \leq p \leq 5$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen.

c $f(x) = \dfrac{5\,e^x}{e^x - e}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(e^x - e)\cdot 5\,e^x - 5\,e^x \cdot e^x}{(e^x - e)^2} = \dfrac{5\,e^{2x} - 5\,e^{x+1} - 5\,e^{2x}}{(e^x - e)^2} = \dfrac{-5\,e^{x+1}}{(e^x - e)^2}$

$\text{rc}_k = f'(0) = \dfrac{-5\,e^1}{(e^0 - e)^2} = \dfrac{-5\,e}{(1-e)^2}$

54 **a** Geen verticale asymptoot als $e^x + q = 0 \wedge -e^x - 1 \neq 0$ geen oplossing heeft.
Dat is het geval als $q \geq 0$.

b $\lim_{x\to-\infty} f_{p,q}(x) = -3$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{p\,e^x - 1}{e^x + q} = -3$

$\dfrac{p\cdot 0 - 1}{0 + q} = -3$

$\dfrac{-1}{q} = -3$

$q = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty} f_{p,q}(x) = 4$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{p\,e^x - 1}{e^x + q} = 4$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{p - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{q}{e^x}} = 4$

$\dfrac{p - 0}{1 + 0} = 4$

$p = 4$

Dus voor $p = 4$ en $q = \frac{1}{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $e^2+q=0$
$q=-e^2$
$\lim\limits_{x\to\infty} f_{p,q}(x)=2$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p\,e^x-1}{e^x+q}=2$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{q}{e^x}}=2$
$\dfrac{p-0}{1+0}=2$
$p=2$
Dus voor $p=2$ en $q=-e^2$.
Dit geeft $f_{2,-e^2}(x)=\dfrac{2\,e^x-1}{e^x-e^2}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{2,-e^2}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\,e^x-1}{e^x-e^2}=\dfrac{2\cdot 0-1}{0-e^2}=\dfrac{1}{e^2}$
Dus in dit geval is voor $x\to-\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y=\dfrac{1}{e^2}$.

d Er moet voor $x=-\ln(2)$ gelden dat $p\,e^x-1=0 \wedge e^x+q=0$.
Dit geeft $p\,e^{-\ln(2)}-1=0 \wedge e^{-\ln(2)}+q=0$
$p\,e^{\ln(\frac{1}{2})}-1=0 \wedge e^{\ln(\frac{1}{2})}+q=0$
$p\cdot\frac{1}{2}-1=0 \wedge \frac{1}{2}+q=0$
$p=2 \wedge q=-\frac{1}{2}$

55 **a** $f(x)=\dfrac{2x\,e^x+3}{e^{x+2}}$ geeft
$f'(x)=\dfrac{e^{x+2}\cdot(2\cdot e^x+2x\cdot e^x)-(2x\,e^x+3)\cdot e^{x+2}}{(e^{x+2})^2}=\dfrac{2\,e^x+2x\,e^x-2x\,e^x-3}{e^{x+2}}=\dfrac{2\,e^x-3}{e^{x+2}}$
$f'(x)=0$ geeft $2\,e^x-3=0$
$2\,e^x=3$
$e^x=1\frac{1}{2}$
$x=\ln(1\frac{1}{2})$
$f(\ln(1\frac{1}{2}))=\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})\,e^{\ln(1\frac{1}{2})}+3}{e^{\ln(1\frac{1}{2})+2}}=\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})\cdot 1\frac{1}{2}+3}{e^{\ln(1\frac{1}{2})}\cdot e^2}=\dfrac{3\ln(1\frac{1}{2})+3}{1\frac{1}{2}e^2}=\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})+2}{e^2}$
Dus $A\left(\ln(1\frac{1}{2}),\ \dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})+2}{e^2}\right)$.

b $f(x)=\dfrac{2x\,e^x+3}{e^{x+2}}=\dfrac{2x\,e^x+3}{e^x\cdot e^2}=\dfrac{2x\,e^x}{e^2\cdot e^x}+\dfrac{3}{e^2\cdot e^x}=\dfrac{2}{e^2}x+\dfrac{3}{e^2}\cdot\dfrac{1}{e^x}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{e^2}\cdot\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{3}{e^2}\cdot 0=0$, dus de lijn $y=\dfrac{2}{e^2}x$ is scheve asymptoot.

c $x=\ln(1\frac{1}{2})$ invullen bij $y=\dfrac{2}{e^2}x$ geeft $y=\dfrac{2}{e^2}\cdot\ln(1\frac{1}{2})=\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})}{e^2}$, dus
$p=\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})+2}{e^2}-\dfrac{2\ln(1\frac{1}{2})}{e^2}=\dfrac{2}{e^2}$.
Los op $\left|f(x)-\dfrac{2}{e^2}x\right|=0{,}01\cdot\dfrac{2}{e^2}$ oftewel $\left|\dfrac{2x\,e^x+3}{e^{x+2}}-\dfrac{2}{e^2}x\right|=\dfrac{0{,}02}{e^2}$.
Voer in $y_1=\left|\dfrac{2x\,e^x+3}{e^{x+2}}-\dfrac{2}{e^2}x\right|$ en $y_2=\dfrac{0{,}02}{e^2}$.
De optie snijpunt geeft $x\approx 5{,}01$.

56 **a** $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to -\infty} \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to \infty} \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim\limits_{e^{\frac{1}{x}}\to \infty} \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \dfrac{2}{1+0} = 2$

b $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{2\,e^0}{e^0+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{2\,e^0}{e^0+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1$

Er is dus één horizontale asymptoot, en de formule ervan is $y = 1$.

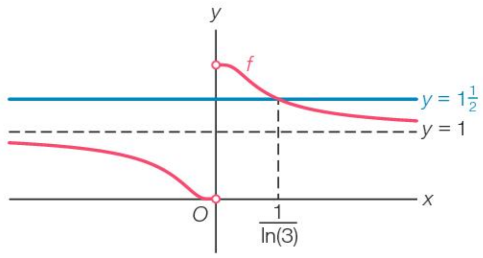
c $f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{3}{2}$

$4\,e^{\frac{1}{x}} = 3\,e^{\frac{1}{x}} + 3$

$e^{\frac{1}{x}} = 3$

$\dfrac{1}{x} = \ln(3)$

$x = \dfrac{1}{\ln(3)}$



$f(x) \leq 1\frac{1}{2}$ geeft $x < 0 \vee x \geq \dfrac{1}{\ln(3)}$

d $f(x) = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}}+1)\cdot 2\,e^{\frac{1}{x}}\cdot -\dfrac{1}{x^2} - 2\,e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot -\dfrac{1}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}}+1)^2} = \frac{2\,e^{\frac{2}{x}} + 2\,e^{\frac{1}{x}} - 2\,e^{\frac{2}{x}}}{(e^{\frac{1}{x}}+1)^2}\cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{-2\,e^{\frac{1}{x}}}{x^2(e^{\frac{1}{x}}+1)^2}$$

$\mathrm{rc}_k = f'(1) = \dfrac{-2\,e^1}{1\cdot(e^1+1)^2} = \dfrac{-2\,e}{(e+1)^2}$

Bladzijde 37

57 **a** $\ln(x) - 1 = 0 \wedge \ln(x) \neq 0$

$\ln(x) = 1$

$x = e$

De verticale asymptoot is de lijn $x = e$.

b $f(x) = 0$ geeft $\ln(x) = 0$

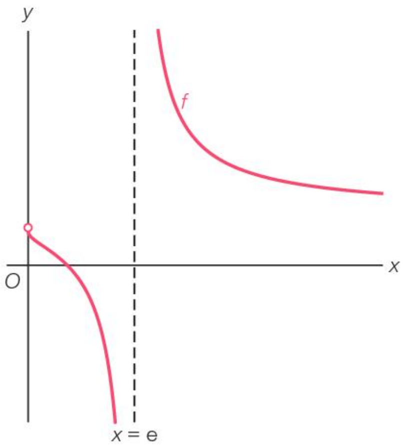
$x = 1$

Dus het nulpunt van f is 1.

c

x	0,00001	0,0001	10	100
$f(x)$	0,92	0,90	1,77	1,28

© Noordhoff Uitgevers bv

d 

e $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$

f ja

Bladzijde 38

58 **a** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\ln(x)}{1+\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{4\ln(x)}{1+\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{4}{\dfrac{1}{\ln(x)}+1} = \dfrac{4}{0+1} = 4$

b $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2)}{1+\ln(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln|x|}{1+2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to -\infty} \dfrac{2\ln|x|}{1+2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to -\infty} \dfrac{2}{\dfrac{1}{\ln|x|}+2} = \dfrac{2}{0+2} = 1$

c $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln|x|}{4+\ln(x^2)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln|x|}{4+2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to \infty} \dfrac{\ln|x|}{4+2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to \infty} \dfrac{1}{\dfrac{4}{\ln|x|}+2} = \dfrac{1}{0+2} = \tfrac{1}{2}$

d $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{2-\ln^2(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{2-\ln^2(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{2}{\ln^2(x)}-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$

59 **a** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\ln(x)}{\ln(\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\ln(x)}{\ln(x^{\frac{1}{2}})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\ln(x)}{\frac{1}{2}\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{3+\ln(x)}{\frac{1}{2}\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{\ln(x)}+1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{0+1}{\frac{1}{2}} = 2$

b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1+{}^{8}\log(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1+\dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(8)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1+\dfrac{{}^{2}\log(x)}{3}} = \lim\limits_{{}^{2}\log(x)\to\infty} \dfrac{{}^{2}\log(x)}{1+\dfrac{{}^{2}\log(x)}{3}} = \lim\limits_{{}^{2}\log(x)\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{{}^{2}\log(x)}+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{0+\frac{1}{3}} = 3$

c $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{1-2\ln|x|} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2\ln|x|}{1-2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to \infty} \dfrac{2\ln|x|}{1-2\ln|x|} = \lim\limits_{\ln|x|\to \infty} \dfrac{2}{\dfrac{1}{\ln|x|}-2} = \dfrac{2}{0-2} = -1$

d $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\ln(x)}{2+\log(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\ln(x)}{2+\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{2+\ln(x)}{2+\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{\ln(x)}+1}{\dfrac{2}{\ln(x)}+\dfrac{1}{\ln(10)}} = \dfrac{0+1}{0+\dfrac{1}{\ln(10)}} = \ln(10)$

60 **a** $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\ln(x)-1}{2\ln(x)-3} = \lim\limits_{\ln(x)\to -\infty} \dfrac{\ln(x)-1}{2\ln(x)-3} = \lim\limits_{\ln(x)\to -\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{\ln(x)}}{2-\dfrac{3}{\ln(x)}} = \dfrac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

b $2\ln(x)-3=0 \wedge \ln(x)-1\neq 0$
$2\ln(x)=3 \wedge \ln(x)\neq 1$
$\ln(x)=1\frac{1}{2} \wedge \ln(x)\neq 1$
$x=e^{1\frac{1}{2}}=e\sqrt{e}$
De verticale asymptoot is de lijn $x=e\sqrt{e}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)-1}{2\ln(x)-3} = \lim\limits_{\ln(x)\to\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{\ln(x)}}{2-\dfrac{3}{\ln(x)}} = \dfrac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

De horizontale asymptoot is de lijn $y=\frac{1}{2}$.
Dus $B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

$f(x)=0$ geeft $\ln(x)-1=0$
$\ln(x)=1$
$x=e$
Dus $A(e, 0)$.

$f(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{2\ln(x)-3}$ geeft

$f'(x)=\dfrac{(2\ln(x)-3)\cdot\frac{1}{x}-(\ln(x)-1)\cdot\frac{2}{x}}{(2\ln(x)-3)^2} = \dfrac{2\ln(x)-3-2\ln(x)+2}{x(2\ln(x)-3)^2} = \dfrac{-1}{x(2\ln(x)-3)^2}$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(e)=\dfrac{-1}{e(2\ln(e)-3)^2}=\dfrac{-1}{e(2-3)^2}=-\dfrac{1}{e}$.

$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{e}x+b \\ \text{door } A(e, 0)\end{array}\right\} -\dfrac{1}{e}\cdot e+b=0$
$-1+b=0$
$b=1$

Dus k: $y=-\dfrac{1}{e}x+1$.

k snijden met de horizontale asymptoot geeft $-\dfrac{1}{e}x+1=\frac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{e}x=-\frac{1}{2}$
$x=\frac{1}{2}e$

Dus $C(\frac{1}{2}e, \frac{1}{2})$.
k snijden met de verticale asymptoot geeft $y=-\dfrac{1}{e}\cdot e\sqrt{e}+1=1-\sqrt{e}$, dus $D(e\sqrt{e}, 1-\sqrt{e})$.
$B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ en $C(\frac{1}{2}e, \frac{1}{2})$ geeft $BC=e\sqrt{e}-\frac{1}{2}e$
$B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ en $D(e\sqrt{e}, 1-\sqrt{e})$ geeft $BD=\frac{1}{2}-(1-\sqrt{e})=\sqrt{e}-\frac{1}{2}$
$O(\triangle BCD)=\frac{1}{2}\cdot(e\sqrt{e}-\frac{1}{2}e)\cdot(\sqrt{e}-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(e^2-\frac{1}{2}e\sqrt{e}-\frac{1}{2}e\sqrt{e}+\frac{1}{4}e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e\sqrt{e}+\frac{1}{8}e$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Voor f geldt $y = \dfrac{\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 3}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \dfrac{\ln(y) - 1}{2\ln(y) - 3}$

$$2x\ln(y) - 3x = \ln(y) - 1$$
$$2x\ln(y) - \ln(y) = 3x - 1$$
$$(2x - 1)\ln(y) = 3x - 1$$
$$\ln(y) = \frac{3x - 1}{2x - 1}$$
$$y = e^{\frac{3x-1}{2x-1}}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{\frac{3x-1}{2x-1}}$.

$f^{\text{inv}}(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{3x-1}{2x-1}} = e^{2x}$

$$\frac{3x - 1}{2x - 1} = 2x$$
$$2x(2x - 1) = 3x - 1$$
$$4x^2 - 2x = 3x - 1$$
$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$(4x - 1)(x - 1) = 0$$
$$x = \tfrac{1}{4} \vee x = 1$$

$g(\frac{1}{4}) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ en $g(1) = e^2$

Dus $E(\frac{1}{4}, \sqrt{e})$ en $F(1, e^2)$.

61 **a** $$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2\ln|x| - 4}{2\ln|x| - 1} = \lim_{\ln|x| \to -\infty} \frac{2\ln|x| - 4}{2\ln|x| - 1} = \lim_{\ln|x| \to -\infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln|x|}}{2 - \frac{1}{\ln|x|}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2\ln(x) - 4}{2\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{2\ln(x) - 4}{2\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

b $\ln(x^2) - 1 = 0 \wedge \ln(x^2) - 4 \neq 0$

$\ln(x^2) = 1 \wedge \ln(x^2) \neq 4$

$x^2 = e$

$x = \sqrt{e} \vee x = -\sqrt{e}$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \sqrt{e}$ en $x = -\sqrt{e}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\ln(x) - 4}{2\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{2\ln(x) - 4}{2\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

c $f(x) = 10$ geeft $\dfrac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = 10$

$$10\ln(x^2) - 10 = \ln(x^2) - 4$$
$$9\ln(x^2) = 6$$
$$\ln(x^2) = \tfrac{2}{3}$$
$$x^2 = e^{\frac{2}{3}}$$
$$x = e^{\frac{1}{3}} \vee x = -e^{\frac{1}{3}}$$
$$x = \sqrt[3]{e} \vee x = -\sqrt[3]{e}$$

$f(x) \leq 10$ geeft $x < -\sqrt{e} \vee -\sqrt[3]{e} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq \sqrt[3]{e} \vee x > \sqrt{e}$

d $f(x) = 0$ geeft $\ln(x^2) - 4 = 0$

$\ln(x^2) = 4$

$x^2 = e^4$

$x = e^2 \vee x = -e^2$

Dus $A(e^2, 0)$.

$f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(\ln(x^2) - 1) \cdot \frac{2}{x} - (\ln(x^2) - 4) \cdot \frac{2}{x}}{(\ln(x^2) - 1)^2} = \frac{2\ln(x^2) - 2 - 2\ln(x^2) + 8}{x(\ln(x^2) - 1)^2} = \frac{6}{x(\ln(x^2) - 1)^2}$$

$$\text{rc}_k = f'(e^2) = \frac{6}{e^2(\ln(e^4) - 1)^2} = \frac{6}{e^2(4 - 1)^2} = \frac{6}{9e^2} = \frac{2}{3e^2}$$

$k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$\dfrac{2}{3e^2} \cdot \text{rc}_l = -1$

$\text{rc}_l = -1\frac{1}{2}e^2$

$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}e^2x + b \\ \text{door } A(e^2, 0) \end{array}\right\} -1\frac{1}{2}e^2 \cdot e^2 + b = 0$

$b = 1\frac{1}{2}e^4$

Dus l: $y = -1\frac{1}{2}e^2x + 1\frac{1}{2}e^4$ en $B(0, 1\frac{1}{2}e^4)$.

62 $f(x) = \dfrac{\ln^2(x) - 1}{\ln(x) - 1} = \dfrac{(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)}{\ln(x) - 1}$

Voor de perforatie geldt $\ln(x) - 1 = 0$

$\ln(x) = 1$

$x = e$

$$\lim_{x \to e} f(x) = \lim_{x \to e} \frac{(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)}{\ln(x) - 1} = \lim_{x \to e}(\ln(x) + 1) = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$$

De perforatie is $A(e, 2)$.

$g(x) = \ln(x) + 1$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(e) = \dfrac{1}{e}$

$\dfrac{1}{e} \cdot \text{rc}_k = -1$ geeft $\text{rc}_k = -e$

$\left.\begin{array}{l} y = -ex + b \\ \text{door } A(e, 2) \end{array}\right\} -e \cdot e + b = 2$

$b = e^2 + 2$

Dus k: $y = -ex + e^2 + 2$.

k snijden met de x-as geeft $-ex + e^2 + 2 = 0$

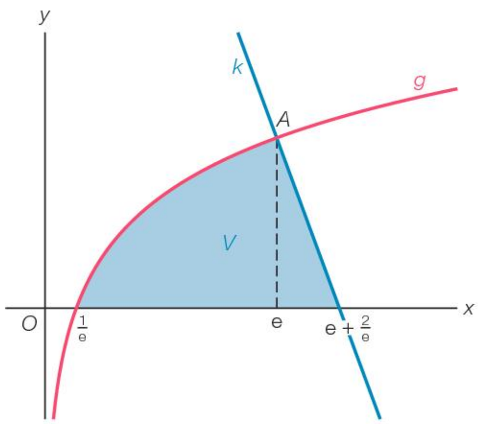
$ex = e^2 + 2$

$x = e + \dfrac{2}{e}$

$g(x) = 0$ geeft $\ln(x) + 1 = 0$

$\ln(x) = -1$

$x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



$$O(V) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln(x) + 1)\,dx + O(\text{driehoek}) = \left[x\ln(x) - x + x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} \cdot (\ln(e) + 1) = \left[x\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} \cdot 2$$

$$= e\ln(e) - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{2}{e} = e + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} = e + \frac{3}{e}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Diagnostische toets

Bladzijde 42

1 **a** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6$

b $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$

2 **a** $f_a(x)=\dfrac{4x^2+2x-12}{2x+a}=\dfrac{(2x+4)(2x-3)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a=4$ en als $a=-3$.

$\lim\limits_{x\to -2}f_4(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2x+4)(2x-3)}{2x+4}=\lim\limits_{x\to -2}(2x-3)=-4-3=-7$

Voor $a=4$ is de perforatie $(-2,-7)$.

$\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}}f_{-3}(x)=\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}}\dfrac{(2x+4)(2x-3)}{2x-3}=\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}}(2x+4)=3+4=7$

Voor $a=-3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 7)$.

b $f_a(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{2x+a}=\dfrac{(x-2)(2x+3)}{2x+a}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)(2x+3)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a=-4$ en als $a=3$.

$\lim\limits_{x\to 2}f_{-4}(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)(2x+3)}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{2}(2x+3))=\frac{1}{2}(4+3)=3\frac{1}{2}$

Voor $a=-4$ is de perforatie $(2, 3\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x\to -1\frac{1}{2}}f_3(x)=\lim\limits_{x\to -1\frac{1}{2}}\dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)(2x+3)}{2x+3}=\lim\limits_{x\to -1\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}(2x-4))=\frac{1}{2}(-3-4)=-3\frac{1}{2}$

Voor $a=3$ is de perforatie $(-1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

3 **a** $\lim\limits_{x\uparrow 1}f_p(x)=\lim\limits_{x\uparrow 1}3^{x-p}=3^{1-p}$

$\lim\limits_{x\downarrow 1}f_p(x)=\lim\limits_{x\downarrow 1}(x^2+8)=1^2+8=9$

$\lim\limits_{x\to 1}f_p(x)$ bestaat als $3^{1-p}=9$

$3^{1-p}=3^2$

$1-p=2$

$p=-1$

b $\lim\limits_{x\uparrow 1}f_p(x)=\lim\limits_{x\uparrow 1}|px-3|=|p-3|$

$\lim\limits_{x\downarrow 1}f_p(x)=\lim\limits_{x\downarrow 1}(x^2+3x)=1^2+3\cdot 1=4$

$\lim\limits_{x\to 1}f_p(x)$ bestaat als $|p-3|=4$

$p-3=4\vee p-3=-4$

$p=7\vee p=-1$

4 **a** $f_p(x) = (2x-2)(x+p) = 2x^2 + 2px - 2x - 2p$ voor $x + p \geq 0$, dus $x \geq -p$
$f_p(x) = (2x-2)(-x-p) = -2x^2 - 2px + 2x + 2p$ voor $x < -p$
$\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -p} (-4x - 2p + 2) = 4p - 2p + 2 = 2p + 2$
$\lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p} (4x + 2p - 2) = -4p + 2p - 2 = -2p - 2$
Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -p} f_p'(x)$, dus als $2p + 2 = -2p - 2$
$4p = -4$
$p = -1$

b $f_4(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8 \text{ voor } x \geq -4 \\ -2x^2 - 8x + 2x + 8 = -2x^2 - 6x + 8 \text{ voor } x < -4 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \uparrow -4} f_4'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -4} (-4x - 6) = 16 - 6 = 10$, dus $\text{rc}_k = 10$.
$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = 10$, dus $\alpha = 84{,}2...°$.
$\lim\limits_{x \downarrow -4} f_4'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -4} (4x + 6) = -16 + 6 = -10$, dus $\text{rc}_l = -10$.
$\text{rc}_l = \tan(\beta) = -10$, dus $\beta = -84{,}2...°$.
$\alpha - \beta = 84{,}2...° - -84{,}2...° \approx 169°$
Dus $\angle(k, l) \approx 180° - 169° = 11°$.

c Zie a.
$\text{rc}_k = 2p + 2$ en $\text{rc}_l = -2p - 2$
$k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$
$(2p + 2)(-2p - 2) = -1$
$(2p + 2)^2 = 1$
$2p + 2 = 1 \vee 2p + 2 = -1$
$2p = -1 \vee 2p = -3$
$p = -\frac{1}{2} \vee p = -1\frac{1}{2}$

5 **a** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(5x+2)^2}{x^3+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(25x^2+20x+4)}{x^3+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{25x^3+20x^2+4x}{x^3+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{25 + \dfrac{20}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 + \dfrac{4}{x^3}} = \dfrac{25+0+0}{1+0} = 25$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|8 - 3x^3|}{2x^3 + 50x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-8 + 3x^3}{2x^3 + 50x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-\dfrac{8}{x^3} + 3}{2 + \dfrac{50}{x^2}} = \dfrac{0+3}{2+0} = 1\frac{1}{2}$

6 **a** $x^2 - x - 12 = 0 \wedge 2x^2 - 1 \neq 0$
$(x+3)(x-4) = 0 \wedge 2x^2 \neq 1$
$x = -3 \vee x = 4$
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -3$ en $x = 4$.
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{12}{x^2}} = \dfrac{2 - 0}{1 - 0 - 0} = 2$
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

b $f(x) = 2$ geeft $\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = 2$
$2x^2 - 1 = 2(x^2 - x - 12)$
$2x^2 - 1 = 2x^2 - 2x - 24$
$2x = -23$
$x = -11\frac{1}{2}$
Dus $A(-11\frac{1}{2}, 2)$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 43

7 teller = 0 geeft $2\cos(x) - 1 = 0$

$$2\cos(x) = 1$$
$$\cos(x) = \tfrac{1}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \tfrac{1}{3}\pi \vee x = 1\tfrac{2}{3}\pi$

noemer = 0 geeft $8\sin^2(x) - 6 = 0$

$$8\sin^2(x) = 6$$
$$\sin^2(x) = \tfrac{3}{4}$$
$$\sin(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \vee \sin(x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \tfrac{1}{3}\pi \vee x = \tfrac{2}{3}\pi \vee x = 1\tfrac{1}{3}\pi \vee x = 1\tfrac{2}{3}\pi$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \tfrac{2}{3}\pi$ en $x = 1\tfrac{1}{3}\pi$.

$$f(x) = \frac{2\cos(x) - 1}{8\sin^2(x) - 6} = \frac{2\cos(x) - 1}{8(1 - \cos^2(x)) - 6} = \frac{2\cos(x) - 1}{2 - 8\cos^2(x)} = \frac{2\cos(x) - 1}{-2(4\cos^2(x) - 1)} = \frac{2\cos(x) - 1}{-2(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) - 1)}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}\pi} \frac{2\cos(x) - 1}{-2(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) - 1)} = \lim_{x \to \frac{1}{3}\pi} \frac{1}{-2(2\cos(x) + 1)} = \frac{1}{-2(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = -\tfrac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 1\frac{2}{3}\pi} f(x) = \lim_{x \to 1\frac{2}{3}\pi} \frac{2\cos(x) - 1}{-2(2\cos(x) + 1)(2\cos(x) - 1)} = \lim_{x \to 1\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{-2(2\cos(x) + 1)} = \frac{1}{-2(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = -\tfrac{1}{4}$$

De perforaties zijn de punten $(\tfrac{1}{3}\pi, -\tfrac{1}{4})$ en $(1\tfrac{2}{3}\pi, -\tfrac{1}{4})$.

8 **a** $x - 1 = 0 \wedge 3x^2 + 5x - 2 \neq 0$

$x = 1 \wedge 3x^2 + 5x - 2 \neq 0$

$x = 1$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x - 1} = \frac{3x(x - 1) + 3x + 5x - 2}{x - 1} = 3x + \frac{8x - 2}{x - 1} = 3x + \frac{8(x - 1) + 8 - 2}{x - 1} = 3x + 8 + \frac{6}{x - 1}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{x - 1} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 3x + 8$.

b $x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$

$x^2 = 4 \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$

$(x = 2 \vee x = -2) \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$

$x = 2 \vee x = -2$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

$$g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 19}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x + 5x^2 - 4x - 19}{x^2 - 4} = x + \frac{5x^2 - 19}{x^2 - 4} = x + \frac{5(x^2 - 4) + 20 - 19}{x^2 - 4} = x + 5 + \frac{1}{x^2 - 4}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 4} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 5$.

9 $f(x)=\frac{x^3+x^2-12x}{x^2-9}=\frac{x(x^2+x-12)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x(x+4)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x+4)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x+4)}{x+3}=\frac{3(3+4)}{3+3}=3\frac{1}{2}$

Dus de perforatie is $A(3, 3\frac{1}{2})$.

$(x+3)(x-3)=0 \wedge x(x+4)(x-3)\neq 0$
$(x=3 \vee x=-3) \wedge x\neq 0 \wedge x\neq -4 \wedge x\neq 3$
$x=-3$
Dus de verticale asymptoot is de lijn $x=-3$.

$f(x)=\frac{x(x+4)}{x+3}=\frac{x^2+4x}{x+3}=\frac{x(x+3)-3x+4x}{x+3}=x+\frac{x}{x+3}=x+\frac{x+3-3}{x+3}=x+1-\frac{3}{x+3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+3}=0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y=x+1$.

$\left.\begin{array}{l} y=x+1 \\ x=-3 \end{array}\right\} y=-3+1=-2$
Dus $B(-3, -2)$.

Stel k: $y=ax+b$ met $a=\frac{3\frac{1}{2}--2}{3--3}=\frac{11}{12}$.

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{11}{12}x+b \\ \text{door } B(-3, -2) \end{array}\right\} \frac{11}{12}\cdot -3+b=-2$
$-2\frac{3}{4}+b=-2$
$b=\frac{3}{4}$

Dus k: $y=\frac{11}{12}x+\frac{3}{4}$ en het snijpunt met de y-as is $C(0, \frac{3}{4})$.

10 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}(10-20\cdot(\frac{9}{10})^x)=10-20\cdot 0=10$

b $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-5}{e^x+20}=\frac{0-5}{0+20}=-\frac{1}{4}$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+2}+1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^2\cdot e^x+1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{e^2}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{0+0}{1+0}=0$

d $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5\cdot 3^x+2}{4\cdot 2^x+1}=\frac{5\cdot 0+2}{4\cdot 0+1}=2$

11 **a** $f_{3,4}(x)=\frac{3e^x}{2e^x-4e}$

$2e^x-4e=0 \wedge 3e^x\neq 0$
$2e^x=4e \wedge e^x\neq 0$
$e^x=2e \wedge e^x\neq 0$
$x=\ln(2e)$
De verticale asymptoot is de lijn $x=\ln(2e)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_{3,4}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3e^x}{2e^x-4e}=\frac{3\cdot 0}{2\cdot 0-4e}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_{3,4}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^x}{2e^x-4e}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2-\frac{4e}{e^x}}=\frac{3}{2-0}=1\frac{1}{2}$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y=0$ en $y=1\frac{1}{2}$.

b De verticale asymptoot is de lijn $x=3$, dus er geldt $2e^x-qe=0$ voor $x=3$.
Dit geeft $qe=2e^3$ oftewel $q=2e^2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f_{p,q}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{pe^x}{2e^x-qe}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p}{2-\frac{qe}{e^x}}=\frac{p}{2-0}=\frac{1}{2}p$

De horizontale asymptoot is de lijn $y=\frac{1}{2}p$.
$\frac{1}{2}p=4$ geeft $p=8$
Dus voor $p=8$ en $q=2e^2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{{}^2\log(x)}{1+{}^{16}\log(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{{}^2\log(x)}{1+\dfrac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(16)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{{}^2\log(x)}{1+\dfrac{{}^2\log(x)}{4}}=\lim\limits_{{}^2\log(x)\to\infty}\dfrac{{}^2\log(x)}{1+\frac{1}{4}\cdot{}^2\log(x)}=$

$\lim\limits_{{}^2\log(x)\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{{}^2\log(x)}+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{0+\frac{1}{4}}=4$

b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^3)}{1-3\ln(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln(x)}{1-3\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{3\ln(x)}{1-3\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{3}{\dfrac{1}{\ln(x)}-3}=\dfrac{3}{0-3}=-1$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\log(x)}{5+\ln(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}}{5+\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}}{5+\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{\ln(x)}+\dfrac{1}{\ln(10)}}{\dfrac{5}{\ln(x)}+1}=\dfrac{0+\dfrac{1}{\ln(10)}}{0+1}=\dfrac{1}{\ln(10)}$

13 **a** $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{4\ln(x)-1}{2\ln(x)-1}=\lim\limits_{\ln(x)\to-\infty}\dfrac{4\ln(x)-1}{2\ln(x)-1}=\lim\limits_{\ln(x)\to-\infty}\dfrac{4-\dfrac{1}{\ln(x)}}{2-\dfrac{1}{\ln(x)}}=\dfrac{4-0}{2-0}=2$

b $2\ln(x)-1=0\wedge 4\ln(x)-1\neq 0$
$2\ln(x)=1\wedge 4\ln(x)\neq 1$
$\ln(x)=\frac{1}{2}\wedge\ln(x)\neq\frac{1}{4}$
$x=\sqrt{e}$
De verticale asymptoot is de lijn $x=\sqrt{e}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\ln(x)-1}{2\ln(x)-1}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{4\ln(x)-1}{2\ln(x)-1}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{1}{\ln(x)}}{2-\dfrac{1}{\ln(x)}}=\dfrac{4-0}{2-0}=2$

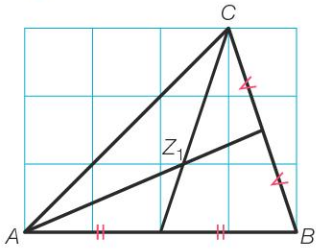
De horizontale asymptoot is de lijn $y=2$.

14 Meetkunde toepassen

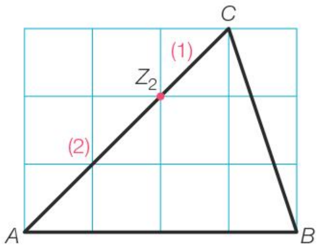
Voorkennis Zwaartelijnen van een driehoek

Bladzijde 48

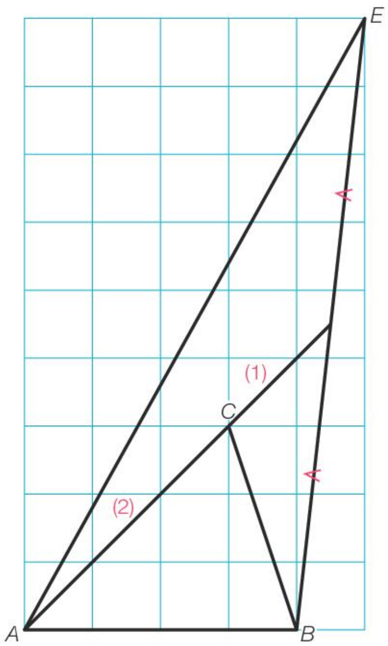
1 **a**



b



c



2 **a** $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

b $CZ : MZ = 2 : 1$, dus $CZ = \frac{2}{3}CM$.

Dus $\vec{z} = \vec{c} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-3\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ en $Z(1\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

3 **a** $\frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{z} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Dus $Z(-1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Voor het midden M van DG geldt

$$\vec{m} = \vec{f} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DM} = \vec{m} - \vec{d} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \vec{d} + 2\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}$$

Dus $G(17, 7)$.

14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

Bladzijde 49

1 **a** $x > y$

b $5AZ = 7BZ$, $AZ = x$ en $BZ = 24 - x$ geeft

$5x = 7(24 - x)$

$5x = 168 - 7x$

$12x = 168$

$x = 14$

De afstand van A tot Z is 14.

2 **a** Er is ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten, dus geldt $4AZ = 3BZ$.
Dit geeft $BZ = \frac{4}{3}AZ$.

b Substitutie van $BZ = \frac{4}{3}AZ$ in $AB = AZ + BZ$ geeft $AB = AZ + \frac{4}{3}AZ = \frac{7}{3}AZ$, dus $AZ = \frac{3}{7}AB$.

c $\vec{z} = \vec{a} + \overrightarrow{AZ} = \vec{a} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} - \frac{3}{7}\vec{a} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} = \frac{1}{7}(4\vec{a} + 3\vec{b})$

Bladzijde 51

3 Voor het zwaartepunt Z van Z_1 met massa $m_1 + m_2$ en C met massa m_3 geldt

$$\vec{z} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot ((m_1 + m_2) \cdot \vec{z}_1 + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \left((m_1 + m_2) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}) + m_3 \cdot \vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) \text{ met } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Bladzijde 52

4 Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 6.

B heeft massa 8.

C heeft massa 2.

D heeft massa 4.

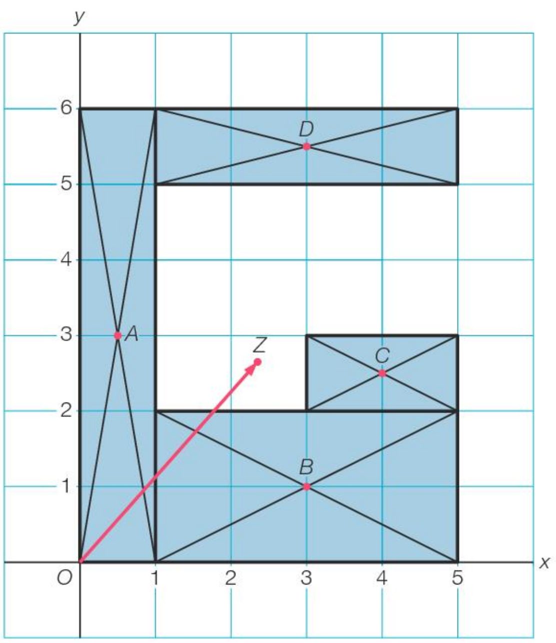
De totale massa is $6 + 8 + 2 + 4 = 20$.

$$\vec{z} = \tfrac{1}{20}(6 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d})$$

$$= \tfrac{1}{20}\left(6 \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}4\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}3\\5\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

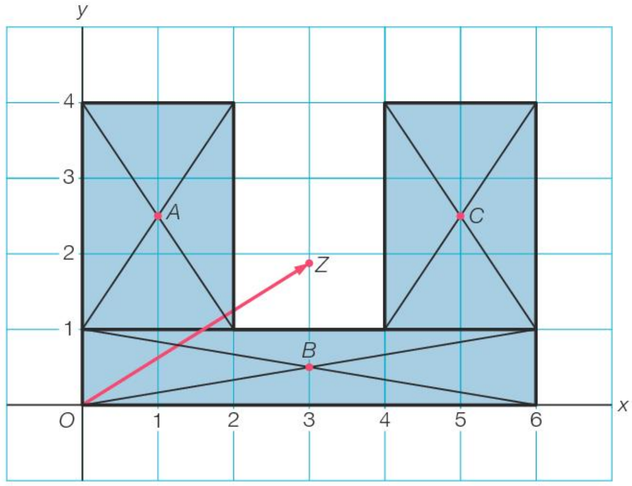
$$= \tfrac{1}{20}\left(\begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}24\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\22\end{pmatrix}\right)$$

$$= \tfrac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix}47\\53\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{7}{20}\\2\frac{13}{20}\end{pmatrix}$$



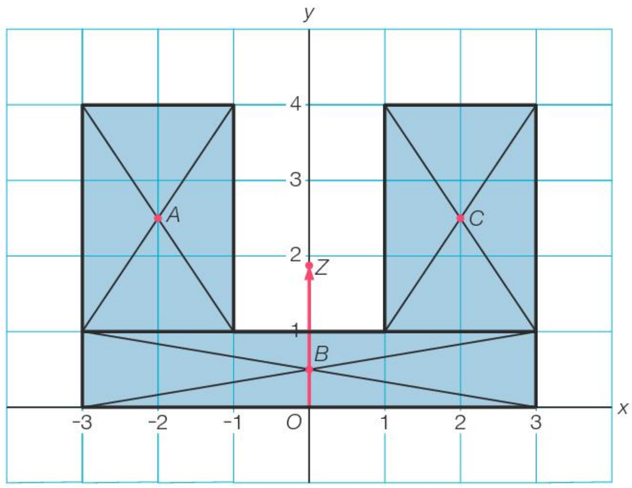
5 **a** Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 6.
B heeft massa 6.
C heeft massa 6.
De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\vec{z} = \tfrac{1}{18}(6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c})$$
$$= \tfrac{1}{18}\left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{18}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

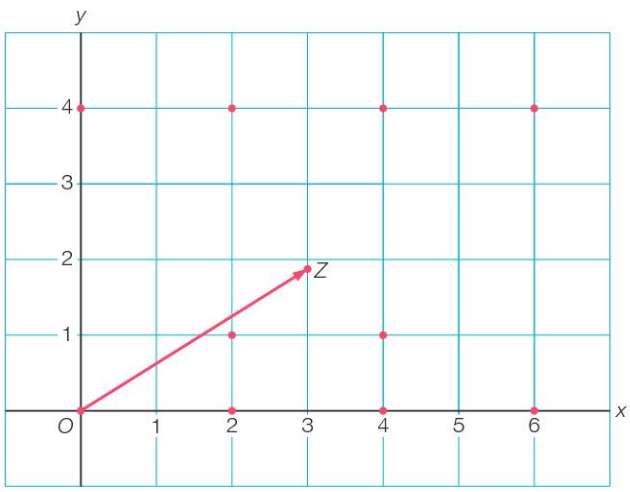


Alternatieve uitwerking
Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 6.
B heeft massa 6.
C heeft massa 6.
De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\vec{z} = \tfrac{1}{18}(6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c})$$
$$= \tfrac{1}{18}\left(6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{18}\left(\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



b

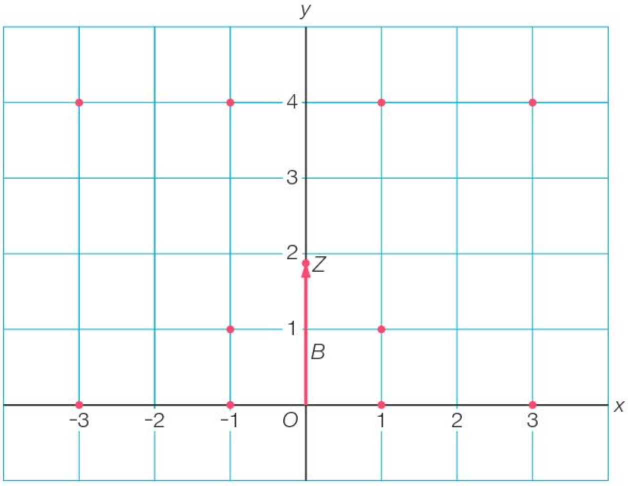


Zie de figuur.
Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z} = \tfrac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking



Zie de figuur.
Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z}=\tfrac{1}{10}\left(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}0\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

6 $AZ : MZ = 2 : 1$, dus $AZ = \frac{2}{3}AM$.
Dus $\vec{z}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{m}-\vec{a})$.
$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ en dit geeft $\vec{z}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a})=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Bladzijde 53

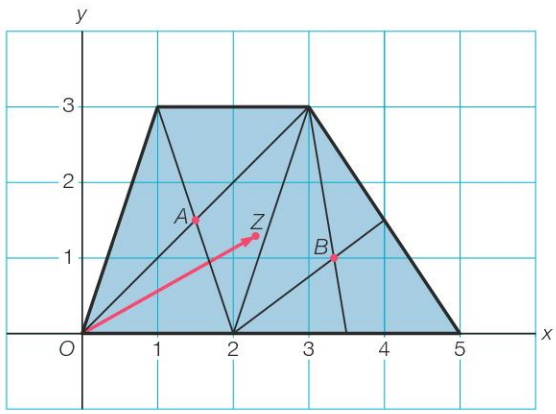
7 Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 6.
B heeft massa $4\frac{1}{2}$.
De totale massa is $10\frac{1}{2}$ en $\dfrac{1}{10\frac{1}{2}}=\frac{2}{21}$.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\frac{1}{2}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}=\tfrac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{z}=\tfrac{2}{21}\left(6\cdot\begin{pmatrix}1\frac{1}{2}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}+4\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right)=\tfrac{2}{21}\left(\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15\\4\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\tfrac{2}{21}\cdot\begin{pmatrix}24\\13\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{2}{7}\\1\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$



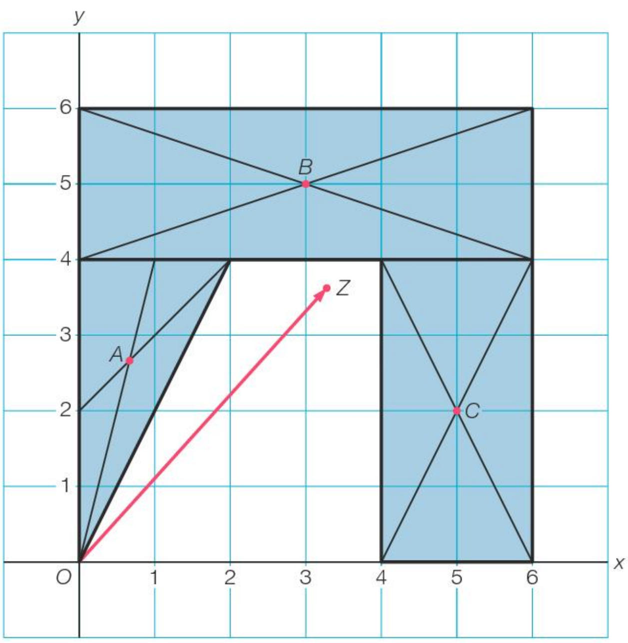
8 Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 4.
B heeft massa 12.
C heeft massa 8.
De totale massa is 24.

$$\vec{a}=\tfrac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{z}=\tfrac{1}{24}\left(4\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\frac{2}{3}\end{pmatrix}+12\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+8\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\tfrac{1}{24}\left(\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\10\frac{2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}36\\60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}40\\16\end{pmatrix}\right)$$

$$=\tfrac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}78\frac{2}{3}\\86\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\frac{5}{18}\\3\frac{11}{18}\end{pmatrix}$$



9 De totale massa is 4 + 6 + 2 + 3 = 15.

$\vec{z} = \frac{1}{15}\left(4 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{15}\left(\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\30\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}21\\9\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix}45\\53\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\frac{8}{15}\end{pmatrix}$

Dus $Z(3, 3\frac{8}{15})$.

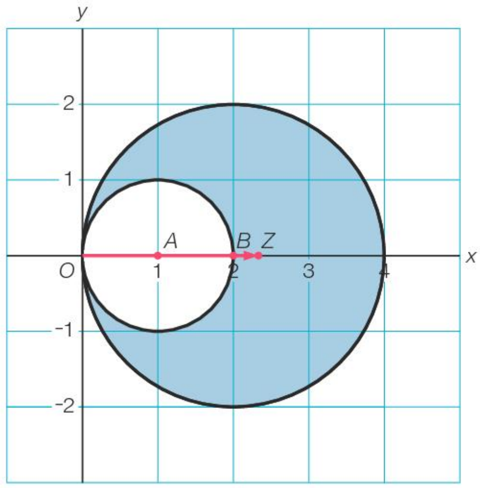
10 Zie de figuur hiernaast.

De massa van de cirkel met middelpunt A is $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

De massa van de cirkel met middelpunt B is $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

De totale massa is $4\pi - \pi = 3\pi$.

$\vec{z} = \frac{1}{3\pi}\left(4\pi \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \pi \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$



Bladzijde 54

11 **a** $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle AMP = 90°\text{, dus } AP^2 = AM^2 + MP^2\\ AM = BM\end{array}\right\} AP^2 = BM^2 + MP^2\\ \angle BMP = 90°\text{, dus } BP^2 = BM^2 + MP^2\end{array}\right\} AP^2 = BP^2\text{, dus } AP = BP$

b $\left.\begin{array}{l}\angle AQP = 90°\text{, dus } \sin(\angle PAQ) = \dfrac{PQ}{AP}\\ \angle ARP = 90°\text{, dus } \sin(\angle PAR) = \dfrac{PR}{AP}\\ \angle PAQ = \angle PAR\end{array}\right\} \dfrac{PQ}{AP} = \dfrac{PR}{AP}\text{, dus } PQ = PR$

Bladzijde 56

12 **a** In figuur 14.20 is × + ∘ + ∘ + × = 180°

2∘ + 2× = 180°

2(∘ + ×) = 180°

∘ + × = 90°

Dus b_1 en b_2 staan loodrecht op elkaar.

b $\dfrac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|12x + 5y - 60|}{\sqrt{169}}$

$\dfrac{|3x + 4y - 24|}{5} = \dfrac{|12x + 5y - 60|}{13}$

$5|12x + 5y - 60| = 13|3x + 4y - 24|$

$5(12x + 5y - 60) = 13(3x + 4y - 24) \vee 5(12x + 5y - 60) = 13(-3x - 4y + 24)$

$60x + 25y - 300 = 39x + 52y - 312 \vee 60x + 25y - 300 = -39x - 52y + 312$

$21x - 27y = -12 \vee 99x + 77y = 612$

$7x - 9y = -4 \vee 99x + 77y = 612$

c De lijn $x - 3y = -14$ oftewel $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$ en is dus stijgend.

De lijn $3x + y = 18$ oftewel $y = -3x + 18$ heeft richtingscoëfficiënt -3 en is dus dalend.

In de figuur zie je dat k een dalende lijn is.

Dus uit de figuur volgt dat $3x + y = 18$ een vergelijking van k is, en niet $x - 3y = -14$.

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** Uit de eigenschap dat in een ruit de diagonalen de hoeken middendoor delen.

b $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Omdat $AB = AC$ en p hoek BAD middendoor deelt, ligt er op p een punt D waarvoor $ABCD$ een ruit is met diagonaal AD.

Een ruit is een parallellogram, dus er geldt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Dus $\vec{r}_p = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_p = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en p: $x - y = 1$.

c q is de bissectrice van $\angle KLM$ en $\angle KLM = \angle(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LM})$, dus q is de bissectrice van de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{LK}$ en $\overrightarrow{LM}$.

d $\overrightarrow{LK} = \vec{k} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

$\overrightarrow{LM} = \vec{m} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

e Nesrin heeft gelijk, want zij gaat uit van een ruit waarvan de zijden lengte $13 \cdot |\overrightarrow{LK}| = 5 \cdot |\overrightarrow{LM}| = 65$ hebben. Thomas gaat niet uit van een ruit.

$\vec{r}_q = 13 \cdot \overrightarrow{LK} + 5 \cdot \overrightarrow{LM} = 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -112 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$,

dus $\vec{n}_q = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ en q: $8x - y = 18$.

14 $P(x, y)$ op een bissectrice geeft $d(P, k) = d(P, l)$

$$\frac{|3x - 4y - 12|}{5} = \frac{|5x + 12y - 48|}{13}$$
$$13 \cdot |3x - 4y - 12| = 5 \cdot |5x + 12y - 48|$$
$$13(3x - 4y - 12) = 5(5x + 12y - 48) \vee 13(3x - 4y - 12) = 5(-5x - 12y + 48)$$
$$39x - 52y - 156 = 25x + 60y - 240 \vee 39x - 52y - 156 = -25x - 60y + 240$$
$$14x - 112y = -84 \vee 64x + 8y = 396$$
$$x - 8y = -6 \vee 8x + y = 49\tfrac{1}{2}$$

Dus m: $x - 8y = -6$ en n: $8x + y = 49\frac{1}{2}$.

De snijpunten met de y-as zijn $A(0, \frac{3}{4})$ en $B(0, 49\frac{1}{2})$.

$d(A, B) = 49\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 48\frac{3}{4}$

Bladzijde 57

15 $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ en AB: $15x + 8y = 180$.

$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en BC: $3x - 4y = -48$.

$P(x, y)$ op k en $d(P, AB) = d(P, BC)$ geeft

$$\frac{|15x + 8y - 180|}{\sqrt{289}} = \frac{|3x - 4y + 48|}{\sqrt{25}}$$
$$\frac{|15x + 8y - 180|}{17} = \frac{|3x - 4y + 48|}{5}$$
$$17 \cdot |3x - 4y + 48| = 5 \cdot |15x + 8y - 180|$$
$$17(3x - 4y + 48) = 5(15x + 8y - 180) \vee 17(3x - 4y + 48) = 5(-15x - 8y + 180)$$
$$51x - 68y + 816 = 75x + 40y - 900 \vee 51x - 68y + 816 = -75x - 40y + 900$$
$$-24x - 108y = -1716 \vee 126x - 28y = 84$$
$$2x + 9y = 143 \vee 9x - 2y = 6$$

Uit de figuur volgt k: $9x - 2y = 6$.

AC: $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$ oftewel AC: $x + y = 12$

k snijden met AC geeft $\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ oftewel $\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$ +

$$\begin{aligned} &11x = 30 \\ &\left.\begin{aligned} &x = 2\tfrac{8}{11} \\ &x + y = 12 \end{aligned}\right\} y = 9\tfrac{3}{11} \end{aligned}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

Alternatieve uitwerking

$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = 17$.

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$.

$\vec{r}_k = 5 \cdot \overrightarrow{BA} + 17 \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} + 17 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -68 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ -126 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

en k: $9x - 2y = 6$.

AC: $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$ oftewel AC: $x + y = 12$

k snijden met AC geeft $\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ oftewel $\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$ +

$$\begin{aligned} &11x = 30 \\ &\left.\begin{aligned} &x = 2\tfrac{8}{11} \\ &x + y = 12 \end{aligned}\right\} y = 9\tfrac{3}{11} \end{aligned}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

16 **a** $O(0, 0)$ en $A(8, 0)$, dus de middelloodlijn van OA is de lijn $x = 4$.
m is de middelloodlijn van OB.
Het midden van OB is het punt $(1, 3)$.

$\vec{n}_m = \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = c \\ \text{door } (1, 3) \end{array}\right\} c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$

Dus m: $x + 3y = 10$.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 10 \\ x = 4 \end{array}\right\} \begin{aligned} &4 + 3y = 10 \\ &3y = 6 \\ &y = 2 \end{aligned}$$

Dus $M(4, 2)$.

b $r = d(M, O) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$
Dus een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

17 M is het midden van het lijnstuk AB en k is de middelloodlijn van het lijnstuk AB.
N is het midden van het lijnstuk BC en l is de middelloodlijn van het lijnstuk BC.

$A(3, 0)$ en $B(7, 4)$ geeft $M(\frac{1}{2}(3 + 7), \frac{1}{2}(0 + 4)) = M(5, 2)$ en $\vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_k = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus k: $x + y = 7$.

$B(7, 4)$ en $C(5, 6)$ geeft $N(\frac{1}{2}(7 + 5), \frac{1}{2}(4 + 6)) = N(6, 5)$ en $\vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_l = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus l: $x - y = 1$.

k snijden met l geeft $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ −

$$\begin{aligned} &2y = 6 \\ &\left.\begin{aligned} &y = 3 \\ &x + y = 7 \end{aligned}\right\} x = 4 \end{aligned}$$

Dus $(4, 3)$ is het middelpunt van de cirkel door A, B en C.

© Noordhoff Uitgevers bv

$\left.\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-3)^2=r^2 \\ \text{door } A(3,\ 0)\end{array}\right\} r^2=(3-4)^2+(0-3)^2=1+9=10$

$\left.\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-3)^2=10 \\ D(1,\ 4) \text{ op de cirkel?}\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1-4)^2+(4-3)^2=10 \\ 9+1=10 \\ \text{klopt}\end{array}$

Dus D ligt op de cirkel die door A, B en C gaat.
Dus de punten A, B, C en D liggen op één cirkel.

18 **a** k snijden met de y-as geeft $4y = 12$, dus $y = 3$ en $A(0,\ 3)$.
k snijden met l geeft $3x + 4 = 12$ oftewel $3x = 8$, dus $x = 2\frac{2}{3}$ en $S(2\frac{2}{3},\ 1)$.

b $P(x,\ y)$ op een bissectrice geeft $d(P,\ k) = d(P,\ l)$

$$\frac{|3x+4y-12|}{5}=\frac{|y-1|}{1}$$
$$|3x+4y-12|=5|y-1|$$
$$3x+4y-12=5(y-1) \vee 3x+4y-12=5(-y+1)$$
$$3x+4y-12=5y-5 \vee 3x+4y-12=-5y+5$$
$$3x-y=7 \vee 3x+9y=17$$

Uit de figuur volgt m: $3x - y = 7$ oftewel m: $y = 3x - 7$.

c $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\3p-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\3p-10\end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{AS}=\vec{s}-\vec{a}=\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\-2\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{AP}$ geeft $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\3p-10\end{pmatrix}=0$$
$$4p-3(3p-10)=0$$
$$4p-9p+30=0$$
$$-5p=-30$$
$$p=6$$

Dus $P(6,\ 11)$.

e $\overrightarrow{SP}=\vec{p}-\vec{s}=\begin{pmatrix}p\\3p-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-2\frac{2}{3}\\3p-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{SP}$ geeft $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{SP}=0$

$$\begin{pmatrix}p\\3p-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p-2\frac{2}{3}\\3p-8\end{pmatrix}=0$$
$$p(p-2\tfrac{2}{3})+(3p-10)(3p-8)=0$$
$$p^2-2\tfrac{2}{3}p+9p^2-24p-30p+80=0$$
$$10p^2-56\tfrac{2}{3}p+80=0$$
$$3p^2-17p+24=0$$
$$D=(-17)^2-4\cdot3\cdot24=1$$
$$p=\frac{17+1}{6}=3 \vee p=\frac{17-1}{6}=2\tfrac{2}{3}$$

vold. niet

Dus $P(3,\ 2)$.

Alternatieve uitwerking
$n \perp m$, dus de lijn q door A evenwijdig met n snijdt m loodrecht in P.
Uit b volgt n: $3x + 9y = 17$.
q // n en q door $A(0,\ 3)$ geeft q: $3x + 9y = 27$ oftewel q: $x + 3y = 9$.
m snijden met q.
Substitutie van $y = 3x - 7$ in $x + 3y = 9$ geeft $x + 3(3x - 7) = 9$

$$x+9x-21=9$$
$$10x=30$$
$$x=3$$

$x = 3$ geeft $y = 9 - 7 = 2$
Dus $P(3,\ 2)$.

Bladzijde 58

19 **a** $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{SP}|$ oftewel $|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2$ geeft $p^2 + (3p - 10)^2 = (p - 2\frac{2}{3})^2 + (3p - 8)^2$

$$p^2 + 9p^2 - 60p + 100 = p^2 - 5\tfrac{1}{3}p + 7\tfrac{1}{9} + 9p^2 - 48p + 64$$
$$-6\tfrac{2}{3}p = -28\tfrac{8}{9}$$
$$p = 4\tfrac{1}{3}$$

Dus $P(4\frac{1}{3}, 6)$.

b **Mogelijkheid 1:** $\angle AQS = 90°$.

$m \perp n$, dus de lijn q door A evenwijdig met m snijdt n loodrecht in Q.

$q \,//\, m$ en q door $A(0, 3)$ geeft q: $y = 3x + 3$.

q snijden met n.

Substitutie van $y = 3x + 3$ in $3x + 9y = 17$ geeft $3x + 9(3x + 3) = 17$

$$3x + 27x + 27 = 17$$
$$30x = -10$$
$$x = -\tfrac{1}{3}$$

$x = -\frac{1}{3}$ geeft $y = -1 + 3 = 2$

Dus $Q(-\frac{1}{3}, 2)$.

Mogelijkheid 2: $\angle SAQ = 90°$.

n: $3x + 9y = 17$ oftewel n: $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{8}{9}$

Stel $Q(q, -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9})$.

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ geeft $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix} = 0$

$$4q - 3(-\tfrac{1}{3}q - 1\tfrac{1}{9}) = 0$$
$$4q + q + 3\tfrac{1}{3} = 0$$
$$5q = -3\tfrac{1}{3}$$
$$q = -\tfrac{2}{3}$$

Dus $Q(-\frac{2}{3}, 2\frac{1}{9})$.

20 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}_k = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en k: $x + 2y = 6$.

k snijden met de x-as geeft $D(6, 0)$.

$\vec{n}_m = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus m: $3x + y = 13$.

m snijden met k geeft het punt E.

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + y = 13 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 6x + 2y = 26 \end{cases} -$$
$$-5x = -20$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 + 2y = 6 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $E(4, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Geval 1: $\angle DPE = 90°$.
$m \perp AC$, dus de lijn p door D evenwijdig met AC snijdt m loodrecht in P.
$p \,//\, AC$ en p door $D(6, 0)$ geeft p: $x - 3y = 6$.
m snijden met p geeft het punt P.

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 3y = 39 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\frac{}{10x = 45} +$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4\tfrac{1}{2} \\ x - 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4\tfrac{1}{2} - 3y = 6 \\ -3y = 1\tfrac{1}{2} \\ y = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Dus $P(4\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$.
$DP^2 = (4\tfrac{1}{2} - 6)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 = 2\tfrac{1}{2}$ en $EP^2 = (4\tfrac{1}{2} - 4)^2 + (-\tfrac{1}{2} - 1)^2 = 2\tfrac{1}{2}$
Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

Geval 2: $\angle EDP = 90°$.
$\vec{n}_{DP} = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ geeft DP: $2x - y = 12$
DP snijden met m geeft het punt P.

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

$$\frac{}{5x = 25} +$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 2x - y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10 - y = 12 \\ y = -2 \end{array}$$

Dus $P(5, -2)$.
$DE^2 = (4 - 6)^2 + (1 - 0)^2 = 5$ en $DP^2 = (5 - 6)^2 + (-2 - 0)^2 = 5$
Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.
Conclusie: in beide gevallen is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

14.2 Cirkels en raaklijnen

Bladzijde 60

21
a 1
b 2
c 2
d 2

Bladzijde 61

22 $r_1 = r_2 = d(M, k) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$
$M_1(-1, 0)$, dus c_1: $(x + 1)^2 + y^2 = 8$.
$M_2(4, 5)$, dus c_2: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$.

23
a $b = -4a + \tfrac{2}{3}$ invullen in $|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft $|3a - 1 - 4a + \tfrac{2}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$$|-a - \tfrac{1}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

kwadrateren geeft

$$a^2 + \tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{9} = 5a^2 + 5$$
$$4a^2 - \tfrac{2}{3}a + 4\tfrac{8}{9} = 0$$
$$36a^2 - 6a + 44 = 0$$
$$18a^2 - 3a + 22 = 0$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 22 = -1575$$

$D < 0$, dus $b = -4a + \tfrac{2}{3}$ voldoet niet.
b Elke lijn k: $y = ax + b$ heeft een richtingscoëfficiënt, dus de verticale richting sluit je hiermee uit.

Bladzijde 62

24 Stel $M(2p, p)$ is een punt op m.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\dfrac{|2 \cdot 2p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2p - 2p - 5|}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{|4p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}}$

$|3p - 1| = |-5|$

$3p - 1 = 5 \vee 3p - 1 = -5$

$3p = 6 \vee 3p = -4$

$p = 2 \vee p = -1\frac{1}{3}$

$r_1 = r_2 = d(M, k) = d(M, l) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$p = 2$ geeft $M(4, 2)$, dus c_1: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

$p = -1\frac{1}{3}$ geeft $M(-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3})$, dus c_2: $(x + 2\frac{2}{3})^2 + (y + 1\frac{1}{3})^2 = 5$.

25 Voor het middelpunt M van de cirkels geldt $d(M, k) = d(M, l)$.
Dus M ligt op de bissectrices van de lijnen k en l.
Omdat M ook op m ligt, kun je de coördinaten van M_1 en M_2 vinden door de bissectrices van k en l te snijden met m.

26 **a** $M(5, 0)$ en $r_1 = 3$.

$N(14, 0)$ en $r_2 = 6$.

$d(M, N) = 14 - 5 = 9$

$d(M, N) - r_1 - r_2 = 9 - 3 - 6 = 0$

Dus de cirkels raken elkaar.

b De cirkels raken elkaar op de x-as in het punt $(8, 0)$.

De verticale raaklijn in dat punt is de lijn k_1: $x = 8$.

Stel k: $y = ax + b$ oftewel k: $ax - y + b = 0$.

$d(M, k) = 3$ geeft $\dfrac{|5a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$

$|5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

$d(N, k) = 6$ geeft $\dfrac{|14a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 6$

$|14a + b| = 6\sqrt{a^2 + 1}$

Hieruit volgt $2|5a + b| = |14a + b|$

$2(5a + b) = 14a + b \vee 2(5a + b) = -14a - b$

$10a + 2b = 14a + b \vee 10a + 2b = -14a - b$

$b = 4a \vee 3b = -24a$

$b = 4a \vee b = -8a$

$b = 4a$ invullen in $|5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|5a + 4a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

$|9a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

$81a^2 = 9a^2 + 9$

$72a^2 = 9$

$a^2 = \frac{1}{8}$

$a = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$

$a = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ geeft $b = \sqrt{2}$ en $a = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ geeft $b = -\sqrt{2}$.

Dus k_2: $y = \frac{1}{4}x\sqrt{2} + \sqrt{2}$ en k_3: $y = -\frac{1}{4}x\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

Hiermee zijn de drie lijnen gevonden, dus $b = -8a$ voldoet niet.

© Noordhoff Uitgevers bv

27 $m\colon x - 2y = -4$ oftewel $m\colon y = \frac{1}{2}x + 2$
Stel $M(2p, p + 2)$ is een punt op m.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 2p - (p + 2)|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|2p - 3(p + 2) + 8|}{\sqrt{10}}$

$|6p - p - 2| = |2p - 3p - 6 + 8|$
$|5p - 2| = |-p + 2|$
$5p - 2 = -p + 2 \vee 5p - 2 = p - 2$
$6p = 4 \vee 4p = 0$
$p = \frac{2}{3} \vee p = 0$

$p = \frac{2}{3}$ geeft $M_1(1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3})$ en $r_1 = d(M_1, k) = \dfrac{|3 \cdot 1\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|1\frac{1}{3}|}{\sqrt{10}} = \dfrac{1\frac{1}{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{4}{3\sqrt{10}}$, dus $r_1{}^2 = \dfrac{16}{90} = \frac{8}{45}$.

Dus $c_1\colon (x - 1\frac{1}{3})^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{45}$.

$p = 0$ geeft $M_2(0, 2)$ en $r_2 = d(M_2, k) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$, dus $r_2{}^2 = \dfrac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Dus $c_2\colon x^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{5}$.

28 Stel $M(2 + 2p, 2 + p)$ is een punt op k.
$l\colon y = -4x + 8$ oftewel $l\colon 4x + y - 8 = 0$

$d(M, l) = d(M, x\text{-as})$ geeft $\dfrac{|4 \cdot (2 + 2p) + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$

$\dfrac{|8 + 8p + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$

$\dfrac{|9p + 2|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$

Voer in $y_1 = \dfrac{|9x + 2|}{\sqrt{17}}$ en $y_2 = |2 + x|$.
De optie snijpunt geeft $x = -0{,}780...$ en $x = 1{,}280...$
Dus $M(0{,}438...; 1{,}219...)$ en $N(4{,}561...; 3{,}280...)$.
$d(M, N) = \sqrt{(4{,}561... - 0{,}438...)^2 + (3{,}280... - 1{,}219...)^2} \approx 4{,}61$

Bladzijde 63

29 **a** M_1 en M_2 liggen op de bissectrices van k en l, en tevens op afstand $\sqrt{10}$ van k en l.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\dfrac{|3x - y - 9|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|x - 3y - 3|}{\sqrt{10}}$

$3x - y - 9 = x - 3y - 3 \vee 3x - y - 9 = -x + 3y + 3$
$2x + 2y = 6 \vee 4x - 4y = 12$
$x + y = 3 \vee x - y = 3$

Uit de figuur volgt dat M_1 op $x + y = 3$ ligt.
M_1 op $x + y = 3$ en $x_{M_1} = p$ geeft $M_1(p, 3 - p)$.

$d(M_1, k) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|3p - (3 - p) - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|3p - 3 + p - 9| = 10$
$|4p - 12| = 10$
$4p - 12 = 10 \vee 4p - 12 = -10$
$4p = 22 \vee 4p = 2$
$p = 5\frac{1}{2} \vee p = \frac{1}{2}$

$p = 5\frac{1}{2}$ geeft $M_1(5\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ vold. niet
$p = \frac{1}{2}$ geeft $M_1(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

© Noordhoff Uitgevers bv

Uit de figuur volgt dat M_2 op $x - y = 3$ ligt
M_2 op $x - y = 3$ en $y_{M_2} = q$ geeft $M_2(q + 3, q)$.

$d(M_2, k) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|3(q+3) - q - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$$|3q + 9 - q - 9| = 10$$
$$|2q| = 10$$
$$2q = 10 \vee 2q = -10$$
$$q = 5 \vee q = -5$$

$q = 5$ geeft $M_2(8, 5)$
$q = -5$ geeft $M_2(-2, -5)$ vold. niet

b De staal r_3 van c_3 is $r_3 = d(M_1, M_2) = \sqrt{(8 - \frac{1}{2})^2 + (5 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$.
Om vergelijkingen van de gemeenschappelijke raaklijnen van c_2 en c_3 op te stellen, gebruik je dat de afstand van M_1 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{62\frac{1}{2}}$ en de afstand van M_2 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{10}$.
Stel m: $y = ax + b$ oftewel m: $ax - y + b = 0$ is een gemeenschappelijke raaklijn van c_2 en c_3.

$d(M_1, m) = \sqrt{62\frac{1}{2}}$ geeft $\dfrac{|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$

$$|\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b| = \sqrt{62\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^2+1}$$

$d(M_2, m) = \sqrt{10}$ geeft $\dfrac{|8a - 5 + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

$$|8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1}$$

Hieruit volgt $|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot |8a - 5 + b|$

$$|\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b| = 2\tfrac{1}{2} \cdot |8a - 5 + b|$$
$$\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b = 2\tfrac{1}{2}(8a - 5 + b) \vee \tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b = 2\tfrac{1}{2}(-8a + 5 - b)$$
$$\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b = 20a - 12\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}b \vee \tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{2} + b = -20a + 12\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}b$$
$$-1\tfrac{1}{2}b = 19\tfrac{1}{2}a - 10 \vee 3\tfrac{1}{2}b = -20\tfrac{1}{2}a + 15$$
$$b = -13a + 6\tfrac{2}{3} \vee b = -5\tfrac{6}{7}a + 4\tfrac{2}{7}$$

Substitutie van $b = -13a + 6\frac{2}{3}$ in $|8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1}$ geeft $|8a - 5 - 13a + 6\frac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1}$

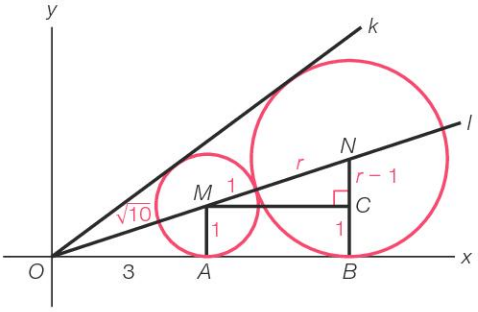
$$|-5a + 1\tfrac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1}$$
$$25a^2 - 16\tfrac{2}{3}a + 2\tfrac{7}{9} = 10a^2 + 10$$
$$15a^2 - 16\tfrac{2}{3}a - 7\tfrac{2}{9} = 0$$
$$27a^2 - 30a - 13 = 0$$
$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 27 \cdot -13 = 2304$$
$$a = \frac{30 + 48}{54} = 1\tfrac{4}{9} \vee a = \frac{30 - 48}{54} = -\tfrac{1}{3}$$

$a = 1\frac{4}{9}$ geeft $b = -13 \cdot 1\frac{4}{9} + 6\frac{2}{3} = -12\frac{1}{9}$, dus m_1: $y = 1\frac{4}{9}x - 12\frac{1}{9}$.
$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -13 \cdot -\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} = 11$, dus m_2: $y = -\frac{1}{3}x + 11$.
Hiermee zijn de twee gemeenschappelijke raaklijnen gevonden, dus $b = -5\frac{6}{7}a + 4\frac{2}{7}$ voldoet niet.

 © Noordhoff Uitgevers bv

30 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{x\text{-as}} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ en l de bissectrice van $\angle(k, x\text{-as})$ geeft $\vec{r}_l = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Dus voor een punt P op l geldt $P(3p, p)$.
De straal van c_1 is 1, dus $M(3, 1)$ en $OM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
Zie de figuur hiernaast.
De straal van c_2 is gelijk aan r gesteld.
$\triangle OAM \sim \triangle MCN$ geeft



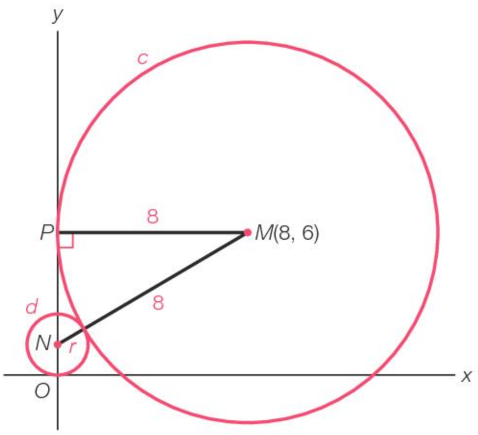
$$\frac{OM}{MN} = \frac{AM}{CN}$$
$$\frac{\sqrt{10}}{r+1} = \frac{1}{r-1}$$
$$r\sqrt{10} - \sqrt{10} = r + 1$$
$$r\sqrt{10} - r = \sqrt{10} + 1$$
$$r(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{10} + 1$$
$$r = \frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1} = \frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1} \cdot \frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}+1} = \frac{10 + 2\sqrt{10} + 1}{10 - 1} = 1\tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9}\sqrt{10}$$

31 **a** $AM = 10$, $AN = 10 - r$ en $MN = r + 10$.
c raakt de positieve x-as in A, dus MA staat loodrecht op de x-as, dus $\angle MAN = 90°$.
De stelling van Pythagoras in driehoek AMN geeft $AN^2 + AM^2 = MN^2$, dus
$(10 - r)^2 + 10^2 = (r + 10)^2$.

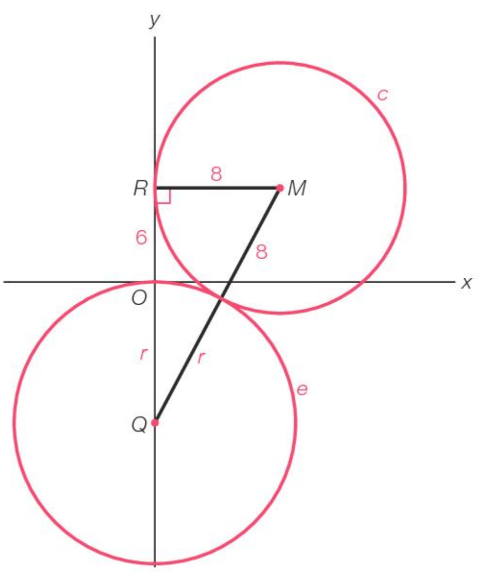
b Haakjes wegwerken geeft $100 - 20r + r^2 + 100 = r^2 + 20r + 100$
$-40r = -100$
$r = 2\tfrac{1}{2}$
Dus d: $(x - 2\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = 6\tfrac{1}{4}$.

Bladzijde 64

32 **a** Stel de straal van d gelijk aan r.
Zie de figuur hiernaast.
$MP = 8$, $NP = 6 - r$ en $MN = r + 8$.
De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft
$MP^2 + NP^2 = MN^2$
$8^2 + (6 - r)^2 = (r + 8)^2$
$64 + 36 - 12r + r^2 = r^2 + 16r + 64$
$-28r = -36$
$r = 1\tfrac{2}{7}$
Dus d: $x^2 + (y - 1\tfrac{2}{7})^2 = 1\tfrac{32}{49}$.

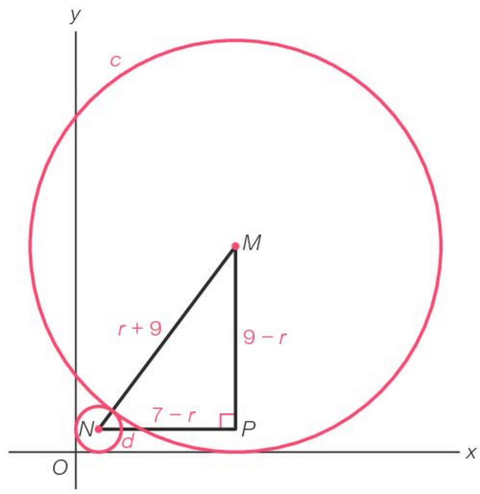


b Noem deze cirkel e en stel de straal van e gelijk aan r.
Zie de figuur hiernaast.
De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft
$8^2 + (r + 6)^2 = (r + 8)^2$
$64 + r^2 + 12r + 36 = r^2 + 16r + 64$
$-4r = -36$
$r = 9$
Dus e: $x^2 + (y + 9)^2 = 81$.

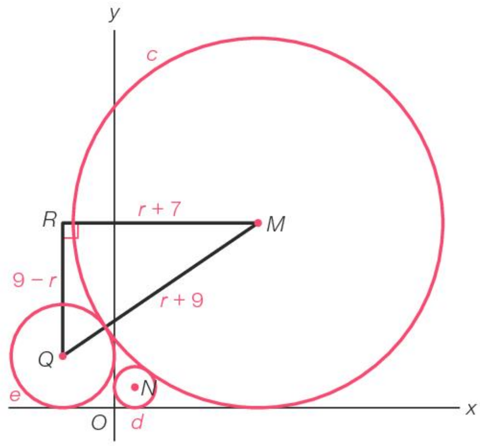


© Noordhoff Uitgevers bv

33 **a** De straal van c is 9.
Stel de straal van d gelijk aan r.
Zie de figuur hiernaast.
$MP = 9 - r$, $NP = 7 - r$ en $MN = r + 9$.
De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft
$MP^2 + NP^2 = MN^2$
$(9 - r)^2 + (7 - r)^2 = (r + 9)^2$
$81 - 18r + r^2 + 49 - 14r + r^2 = r^2 + 18r + 81$
$r^2 - 50r + 49 = 0$
$(r - 1)(r - 49) = 0$
$r = 1 \vee r = 49$
vold. niet
Dus d: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.



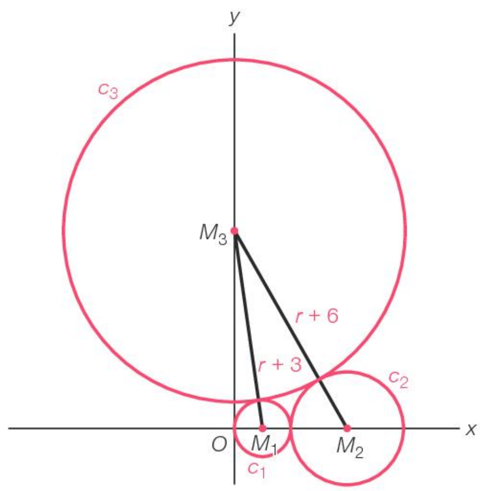
b Stel de straal van e gelijk aan r.
Zie de figuur hiernaast.
De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft
$QR^2 + MR^2 = QM^2$
$(9 - r)^2 + (r + 7)^2 = (r + 9)^2$
$81 - 18r + r^2 + r^2 + 14r + 49 = r^2 + 18r + 81$
$r^2 - 22r + 49 = 0$
$D = (-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 288$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
$r = \dfrac{22 + 12\sqrt{2}}{2} = 11 + 6\sqrt{2} \vee r = 11 - 6\sqrt{2}$
vold. niet



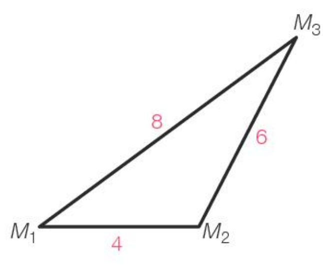
Bladzijde 65

34 **a** Zie de figuur hiernaast.
$OM_1 = 3$, $OM_2 = 12$, $OM_3 = p$, $M_1M_3 = r + 3$ en
$M_2M_3 = r + 6$.
De stelling van Pythagoras in driehoek OM_1M_3 geeft
$OM_1{}^2 + OM_3{}^2 = M_1M_3{}^2$
$3^2 + p^2 = (r + 3)^2$
$p^2 + 9 = (r + 3)^2$
De stelling van Pythagoras in driehoek OM_2M_3 geeft
$OM_2{}^2 + OM_3{}^2 = M_2M_3{}^2$
$12^2 + p^2 = (r + 6)^2$
$p^2 + 144 = (r + 6)^2$

b $p^2 + 9 = (r + 3)^2$ oftewel $p^2 = (r + 3)^2 - 9$
$p^2 + 144 = (r + 6)^2$ oftewel $p^2 = (r + 6)^2 - 144$
Dit geeft $(r + 3)^2 - 9 = (r + 6)^2 - 144$
$r^2 + 6r + 9 - 9 = r^2 + 12r + 36 - 144$
$-6r = -108$
$r = 18$
$r = 18$ geeft $p^2 = (18 + 3)^2 - 9 = 432$, dus $p = \sqrt{432} = 12\sqrt{3} \vee p = -12\sqrt{3}$
vold. niet
Dus $p = 12\sqrt{3}$ en $r = 18$.



35 **a** De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft
$M_1M_3{}^2 = M_1M_2{}^2 + M_2M_3{}^2 - 2 \cdot M_1M_2 \cdot M_2M_3 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
$8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
$64 = 16 + 36 - 48\cos(\angle M_1M_2M_3)$
$48\cos(\angle M_1M_2M_3) = -12$
$\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\frac{1}{4}$
$\angle M_1M_2M_3 \approx 104{,}5°$



© Noordhoff Uitgevers bv

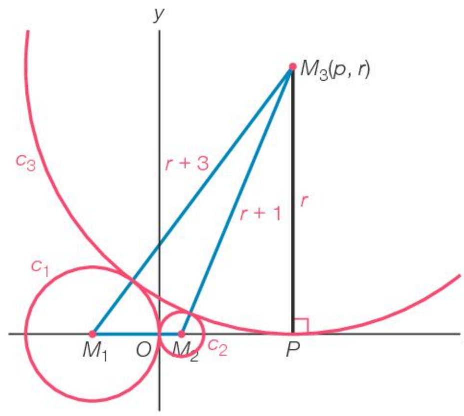
b In driehoek $M_1M_2M_3$ is $M_1M_2 = 4$, $M_1M_3 = r + 3$ en $M_2M_3 = r + 1$.
De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft $(r+3)^2 = 4^2 + (r+1)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (r+1) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$

$$r^2 + 6r + 9 = 16 + r^2 + 2r + 1 - 8(r+1)\cos(\angle M_1M_2M_3)$$
$$8(r+1)\cos(\angle M_1M_2M_3) = -4r - 8$$
$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{-4r-8}{8r+8} = \frac{4(-r-2)}{4(2r+2)} = \frac{-r-2}{2r+2}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{-r-2}{2r+2} = \lim_{r\to\infty} \frac{-1-\frac{2}{r}}{2+\frac{2}{r}} = \frac{-1-0}{2+0} = -\tfrac{1}{2}$$

$\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\tfrac{1}{2}$ geeft $\angle M_1M_2M_3 = 120°$
Zie a, voor $r = 5$ is $\angle M_1M_2M_3 \approx 104{,}5° < 120°$.
Dus er zijn geen waarden van r waarvoor $\angle M_1M_2M_3$ groter dan of gelijk aan 120° wordt.

c De straal van c_1 is 3 en $OM_2 = 1$.
Stel $x_{M_3} = p$.
Zie de figuur hiernaast.



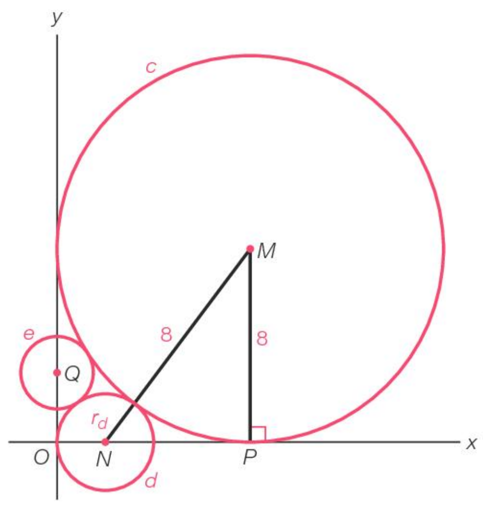
De stelling van Pythagoras in driehoek PM_1M_3 geeft
$M_1P^2 + PM_3^2 = M_1M_3^2$
$(p+3)^2 + r^2 = (r+3)^2$
$p^2 + 6p + 9 + r^2 = r^2 + 6r + 9$
$p^2 + 6p = 6r$
$p^2 = -6p + 6r$
De stelling van Pythagoras in driehoek PM_2M_3 geeft
$M_2P^2 + PM_3^2 = M_2M_3^2$
$(p-1)^2 + r^2 = (r+1)^2$
$p^2 - 2p + 1 + r^2 = r^2 + 2r + 1$
$p^2 - 2p = 2r$
$p^2 = 2p + 2r$
Hieruit volgt $-6p + 6r = 2p + 2r$
$4r = 8p$
$r = 2p$

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = 2p + 2r \\ r = 2p \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 = 2p + 2 \cdot 2p \\ p^2 = 6p \\ p = 0 \ \vee \ p = 6 \\ \text{vold. niet} \end{array}$$

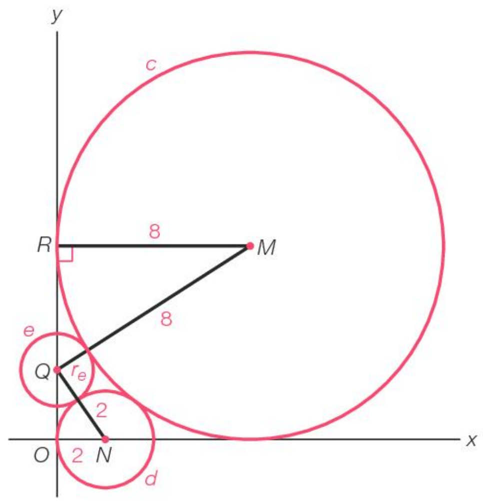
$p = 6$ geeft $r = 12$
Dus $M_3(6, 12)$.

Bladzijde 66

36 Zie de figuur hiernaast.
De straal van d is gelijk aan r_d gesteld.
De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft
$PM^2 + PN^2 = MN^2$
$8^2 + (8 - r_d)^2 = (r_d + 8)^2$
$64 + 64 - 16r_d + r_d^2 = r_d^2 + 16r_d + 64$
$-32r_d = -64$
$r_d = 2$



Stel $Q(0, q)$ en de straal van e gelijk aan r_e.
Zie de figuur hiernaast.



De stelling van Pythagoras in driehoek ONQ geeft
$ON^2 + OQ^2 = NQ^2$
$2^2 + q^2 = (r_e + 2)^2$
$4 + q^2 = r_e^2 + 4r_e + 4$
$q^2 - r_e^2 = 4r_e$
De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft
$QR^2 + MR^2 = MQ^2$
$(8 - q)^2 + 8^2 = (r_e + 8)^2$
$64 - 16q + q^2 + 64 = r_e^2 + 16r_e + 64$
$q^2 - r_e^2 = 16r_e + 16q - 64$
Hieruit volgt $16r_e + 16q - 64 = 4r_e$
$16q = -12r_e + 64$
$q = -\frac{3}{4}r_e + 4$

$$\left.\begin{array}{l} q^2 - r_e^2 = 4r_e \\ q = -\frac{3}{4}r_e + 4 \end{array}\right\} (-\tfrac{3}{4}r_e + 4)^2 - r_e^2 = 4r_e$$
$$\tfrac{9}{16}r_e^2 - 6r_e + 16 - r_e^2 = 4r_e$$
$$-\tfrac{7}{16}r_e^2 - 10r_e + 16 = 0$$
$$7r_e^2 + 160r_e - 256 = 0$$
$D = 160^2 - 4 \cdot 7 \cdot -256 = 32\,768$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{32\,768} = 128\sqrt{2}$
$$r_e = \frac{-160 + 128\sqrt{2}}{14} = -11\tfrac{3}{7} + 9\tfrac{1}{7}\sqrt{2} \vee r_e = \frac{-160 - 128\sqrt{2}}{14} = -11\tfrac{3}{7} - 9\tfrac{1}{7}\sqrt{2}$$
vold. niet

Dus de straal van e is $-11\frac{3}{7} + 9\frac{1}{7}\sqrt{2}$.

14.3 Cirkels en snijpunten

Bladzijde 68

37 **a** Substitutie van $y = -x - 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$ geeft $x^2 + (-x - 1)^2 - 10x - 4(-x - 1) - 3 = 0$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 4x + 4 - 3 = 0$
$2x^2 - 4x + 2 = 0$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$
$D = 0$, dus de k en c hebben één punt gemeenschappelijk.
Dus k raakt aan c.

b $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 4y - 3 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 32$
Dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
$M(5, 2)$ en k: $x + y + 1 = 0$ geeft $d(M, k) = \dfrac{|5 + 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|8|}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.
$d(M, k) = r$, dus k raakt aan c.

Bladzijde 69

38 **a** $D = 484$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{484} = 22$.
$x = \dfrac{12 + 22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \dfrac{12 - 22}{10} = -1$
$x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5}$
$x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 - 3 = -5$
De snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.

b $d(M, k) < r$ geeft $\dfrac{|4 \cdot 5 - 1 - q|}{\sqrt{17}} < \sqrt{17}$ en dit geeft $2 < q < 36$.

© Noordhoff Uitgevers bv

39 **a** Van c_1 is het middelpunt $M(2, 1)$ en de straal $r = \sqrt{13}$.
k: $y = x - 3$ oftewel k: $x - y - 3 = 0$
$$d(M, k) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$
$d(M, k) < r$, dus k snijdt c_1 in twee punten.
b l: $2x + y = 7$ oftewel l: $y = -2x + 7$
Substitutie van $y = -2x + 7$ in $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 18$ geeft $x^2 + (-2x + 7)^2 + 2x + 2(-2x + 7) = 18$
$x^2 + 4x^2 - 28x + 49 + 2x - 4x + 14 = 18$
$5x^2 - 30x + 45 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$
$D = 0$, dus l raakt c_2.
c Van c_3 is het middelpunt $M(4, -1)$ en de straal $r = 3$.
$$d(M, m) = \frac{|4 - 3 \cdot -1 + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$
$d(M, m) > r$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3.

40 **a** k: $x - y + 1 = 0$ oftewel k: $y = x + 1$
Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft
$x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 = 0$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 = 0$
$2x^2 - 10x + 8 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x - 1)(x - 4) = 0$
$x = 1 \vee x = 4$
$x = 1$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.
$x = 4$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(4, 5)$.
b Substitutie van $x = t + 1 \wedge y = 2t + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft
$(t + 1)^2 + (2t + 1)^2 - 8(t + 1) - 4(2t + 1) + 10 = 0$
$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 - 8t - 8 - 8t - 4 + 10 = 0$
$5t^2 - 10t = 0$
$5t(t - 2) = 0$
$t = 0 \vee t = 2$
$t = 0$ geeft het snijpunt $(1, 1)$.
$t = 2$ geeft het snijpunt $(3, 5)$.

Bladzijde 70

41 **a** $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$ oftewel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.
Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$ geeft
$(1\frac{1}{2}y - 2 - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.
Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2}x - 8)^2 + (x - 1)^2$ en $y_2 = 26$.
De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $x = 6$.
Dus $y = 2$ en $y = 6$.
$y = 2$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.
$y = 6$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(7, 6)$.
b $3x + 4y = 19$ geeft $4y = -3x + 19$ oftewel $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$.
Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft
$x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12 = 0$.
Voer in $y_1 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12$.
De optie nulpunt geeft $x = 5$.
$x = 5$ geeft $y = 1$
Het gemeenschappelijke punt is $(5, 1)$.

42 **a** Van c is het middelpunt $M(5, 1)$ en de straal $r = \sqrt{20}$.

k: $y = ax + 1$ oftewel k: $ax - y + 1 = 0$

$$d(M, k) = \frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$d(M, k) < r$ geeft $\frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < \sqrt{20}$

$$|5a| < \sqrt{20a^2 + 20}$$
$$25a^2 < 20a^2 + 20$$
$$5a^2 < 20$$
$$a^2 < 4$$
$$-2 < a < 2$$

b l: $y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel l: $\frac{1}{2}x - y + b = 0$

$$d(M, l) = \frac{|\frac{1}{2} \cdot 5 - 1 + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} = \frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

$d(M, k) > r$ geeft $\frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} > \sqrt{20}$

$$|1\tfrac{1}{2} + b| > \sqrt{25}$$
$$|1\tfrac{1}{2} + b| > 5$$
$$1\tfrac{1}{2} + b > 5 \vee 1\tfrac{1}{2} + b < -5$$
$$b < -6\tfrac{1}{2} \vee b > 3\tfrac{1}{2}$$

43 **a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1))$ oftewel $M(3, 1)$.

$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ en $M(3, 1)$ geeft c: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

Substitutie van $x = -2 + 3t \wedge y = 6 - t$ in $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ geeft $(-2 + 3t - 3)^2 + (6 - t - 1)^2 = 20$

$$(3t - 5)^2 + (5 - t)^2 = 20$$
$$9t^2 - 30t + 25 + 25 - 10t + t^2 = 20$$
$$10t^2 - 40t + 30 = 0$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$(t - 1)(t - 3) = 0$$
$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het snijpunt $(1, 5)$.

$t = 3$ geeft het snijpunt $(7, 3)$.

b k: $y = -2x + p$ oftewel k: $2x + y - p = 0$

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - p|}{\sqrt{5}} = \frac{|7 - p|}{\sqrt{5}}$$

$d(M, k) = r$ geeft $\frac{|7 - p|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20}$

$$|7 - p| = \sqrt{100}$$
$$|7 - p| = 10$$
$$7 - p = 10 \vee 7 - p = -10$$
$$p = -3 \vee p = 17$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $l: y = qx - 5\frac{1}{2}$ oftewel $l: qx - y - 5\frac{1}{2} = 0$

$$d(M, l) = \frac{|3q - 1 - 5\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} = \frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}}$$

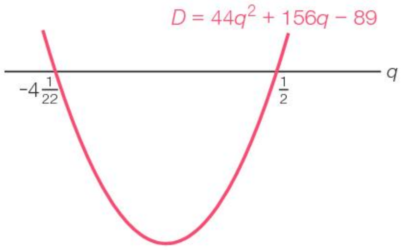
$d(M, l) > r$ geeft $\frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} > \sqrt{20}$

$$|3q - 6\tfrac{1}{2}| > \sqrt{20q^2 + 20}$$
$$9q^2 - 39q + 42\tfrac{1}{4} > 20q^2 + 20$$
$$-11q^2 - 39q + 22\tfrac{1}{4} > 0$$
$$44q^2 + 156q - 89 < 0$$

$44q^2 + 156q - 89 = 0$

$D = 156^2 - 4 \cdot 44 \cdot -89 = 40\,000$

$$q = \frac{-156 + 200}{88} = \tfrac{1}{2} \vee q = \frac{-156 - 200}{88} = -4\tfrac{1}{22}$$



$44q^2 + 156q - 89 < 0$ geeft $-4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$

44 $\left.\begin{array}{l} x^2 + (y - 2)^2 = r^2 \\ \text{door } (0, 0) \end{array}\right\} r^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4$

Dus $c: x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Substitutie van $y = ax^2$ in $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft $x^2 + (ax^2 - 2)^2 = 4$

$$x^2 + a^2x^4 - 4ax^2 + 4 = 4$$
$$a^2x^4 + x^2 - 4ax^2 = 0$$
$$x^2(a^2x^2 + 1 - 4a) = 0$$
$$x^2 = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$
$$x = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

Drie gemeenschappelijke punten in het geval $a^2x^2 + 1 - 4a = 0$ twee oplossingen heeft.

$a^2x^2 + 1 - 4a = 0$

$a^2x^2 = 4a - 1$

$x^2 = \frac{4a - 1}{a^2}$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen als $\frac{4a - 1}{a^2} > 0$

$$4a - 1 > 0$$
$$4a > 1$$
$$a > \tfrac{1}{4}$$

Dus voor $a > \frac{1}{4}$ hebben de parabool en de cirkel drie gemeenschappelijke punten.

45 **a** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ −

$x^2 - (x - 3)^2 = 9$

Oplossen geeft $x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 9$

$$x^2 - x^2 + 6x - 9 = 9$$
$$6x = 18$$
$$x = 3$$

b De lijn $x = 3$ gaat door de snijpunten A en B van de cirkels.

46 **a** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \end{cases}$ $-$

$$12x - 4y - 24 = 0$$
$$3x - y - 6 = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{array}\right\} x^2 + (3x - 6)^2 - 2x - 4(3x - 6) = 0$$
$$x^2 + 9x^2 - 36x + 36 - 2x - 12x + 24 = 0$$
$$10x^2 - 50x + 60 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0$$
$$x = 2 \vee x = 3$$

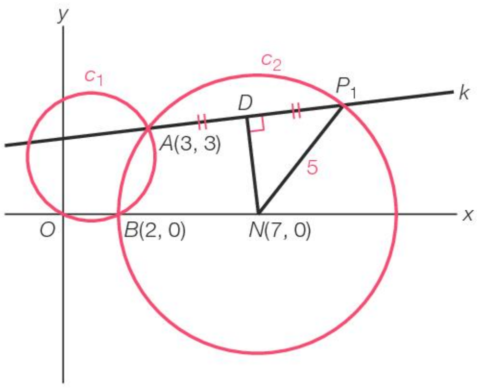
$x = 2$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $B(2, 0)$.
$x = 3$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $A(3, 3)$.

b $\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } A(3, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a + b = 3 \\ b = 3 - 3a \end{array}$

Dus k: $y = ax + 3 - 3a$.

c c_2: $x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$
$x^2 - 14x + y^2 + 24 = 0$
$(x - 7)^2 - 49 + y^2 + 24 = 0$
$(x - 7)^2 + y^2 = 25$

Dus middelpunt $N(7, 0)$ en straal 5.



De loodlijn ND op AP_1 deelt AP_1 middendoor, dus $DP_1 = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De stelling van Pythagoras in driehoek DNP_1 geeft $DN = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\dfrac{|7a - 0 + 3 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$|4a + 3| = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2}$$
$$16a^2 + 24a + 9 = 6\tfrac{1}{4}(2a^2 + 2)$$
$$16a^2 + 24a + 9 = 12\tfrac{1}{2}a^2 + 12\tfrac{1}{2}$$
$$3\tfrac{1}{2}a^2 + 24a - 3\tfrac{1}{2} = 0$$
$$D = 24^2 - 4 \cdot 3\tfrac{1}{2} \cdot -3\tfrac{1}{2} = 625$$
$$a = \frac{-24 + 25}{7} = \tfrac{1}{7} \vee a = \frac{-24 - 25}{7} = -7$$

e $a = \frac{1}{7}$ geeft k_1: $y = \frac{1}{7}x + 3 - \frac{3}{7}$
$a = -7$ geeft k_2: $y = -7x + 3 + 21$
Dus k_1: $y = \frac{1}{7}x + 2\frac{4}{7}$ en k_2: $y = -7x + 24$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 72

47 $AP = 5\sqrt{2}$ geeft dat P op de cirkel met middelpunt A en straal $5\sqrt{2}$ ligt.

Dus c_3: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 50$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 50$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0 \end{cases} -$$

$-8x + 6y + 56 = 0$

$8x = 6y + 56$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{4}y + 7 \\ x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \end{array}\right\} (\tfrac{3}{4}y + 7)^2 + y^2 - 14(\tfrac{3}{4}y + 7) + 24 = 0$$

$$\tfrac{9}{16}y^2 + 10\tfrac{1}{2}y + 49 + y^2 - 10\tfrac{1}{2}y - 98 + 24 = 0$$

$$1\tfrac{9}{16}y^2 = 25$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4 \vee y = -4$$

$y = 4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_1(10, 4)$.

$y = -4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_2(4, -4)$.

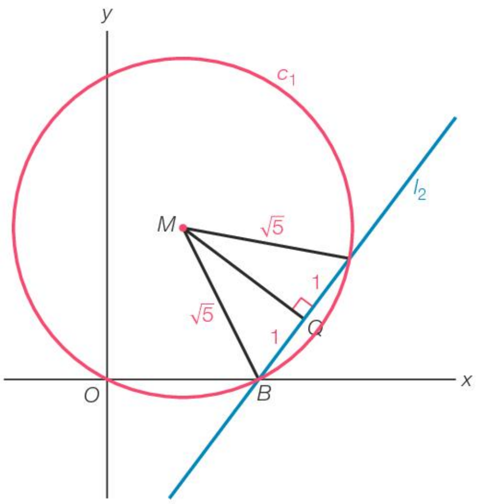
48 $$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } B(2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a + b = 0 \\ b = -2a \end{array}$$

Dus l: $y = ax - 2a$ oftewel l: $ax - y - 2a = 0$.

c_1: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$
$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Dus middelpunt $M(1, 2)$ en straal $\sqrt{5}$.



$MQ = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$, dus $d(M, l) = 2$

$$\frac{|a - 2 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|-a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4(a^2 + 1)$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a(3a - 4) = 0$$

$$a = 0 \vee a = 1\tfrac{1}{3}$$

$a = 0$ geeft l_1: $y = 0$ en $a = 1\frac{1}{3}$ geeft l_2: $y = 1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$.

49 **a** $M(\frac{1}{2}(4+5), \frac{1}{2}(0+5)) = M(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

$\left.\begin{array}{l}(x-4\frac{1}{2})^2+(y-2\frac{1}{2})^2=r^2\\ \text{door } A(4, 0)\end{array}\right\} r^2=(4-4\frac{1}{2})^2+(0-2\frac{1}{2})^2=6\frac{1}{2}$

Dus c: $(x-4\frac{1}{2})^2+(y-2\frac{1}{2})^2=6\frac{1}{2}$

$x^2-9x+20\frac{1}{4}+y^2-5y+6\frac{1}{4}=6\frac{1}{2}$

$x^2+y^2-9x-5y+20=0$

De lijn door A evenwijdig met OB: $y=x$ heeft vergelijking $y=x-4$.

Deze lijn snijden met c geeft $x^2+(x-4)^2-9x-5(x-4)+20=0$

$x^2+x^2-8x+16-9x-5x+20+20=0$

$2x^2-22x+56=0$

$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$

$x=4 \vee x=7$

$x=7$ en $y=x-4$ geeft het punt $E(7, 3)$.

b OB: $y=x$ snijden met c geeft $x^2+x^2-9x-5x+20=0$

$2x^2-14x+20=0$

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$x=2 \vee x=5$

Dus $D(2, 2)$.

d is de cirkel met middelpunt A die door D gaat.

$\left.\begin{array}{l}(x-4)^2+y^2=r^2\\ \text{door } D(2, 2)\end{array}\right\} r^2=(2-4)^2+2^2=8$

Dus d: $(x-4)^2+y^2=8$

$x^2-8x+16+y^2=8$

$x^2+y^2-8x+8=0$

d snijden met c geeft punt E.

$\begin{cases}x^2+y^2-9x-5y+20=0\\ x^2+y^2-8x+8=0\end{cases}$ $-$

$-x-5y+12=0$

$\left.\begin{array}{l}x=-5y+12\\ x^2+y^2-8x+8=0\end{array}\right\} (-5y+12)^2+y^2-8(-5y+12)+8=0$

$25y^2-120y+144+y^2+40y-96+8=0$

$26y^2-80y+56=0$

$13y^2-40y+28=0$

$D=(-40)^2-4\cdot 13\cdot 28=144$

$y=\dfrac{40+12}{26}=2 \vee y=\dfrac{40-12}{26}=1\frac{1}{13}$

$y=1\frac{1}{13}$ en $x=-5y+12$ geeft het punt $E(6\frac{8}{13}, 1\frac{1}{13})$.

c $\vec{n}_k=\vec{r}_{DM}=\vec{m}-\vec{d}=\begin{pmatrix}4\frac{1}{2}\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

BC: $y=5$ snijden met c geeft het punt F.

$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-9x-5y+20=0\\ y=5\end{array}\right\} x^2+25-9x-25+20=0$

$x^2-9x+20=0$

$(x-4)(x-5)=0$

$x=4 \vee x=5$

Dus $F(4, 5)$.

$\vec{n}_l=\vec{r}_{FM}=\vec{m}-\vec{f}=\begin{pmatrix}4\frac{1}{2}\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\frac{1}{2}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{n}_k\cdot\vec{n}_l=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=5-5=0$, dus $k\perp l$, dus $\angle DGF=90°$.

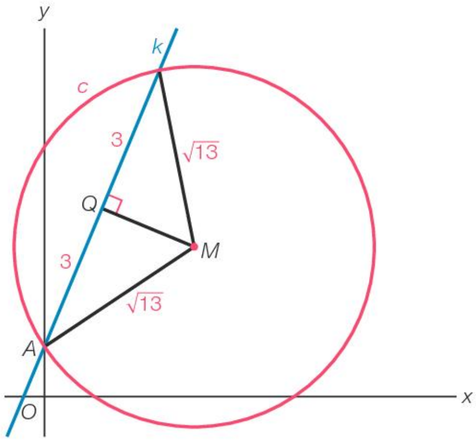
Uit de omgekeerde stelling van Thales volgt dat DF een middellijn is van de cirkel door D, F en G, dus G ligt op de cirkel met middellijn DF.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 73

50 **a** $r_c = d(A, M) = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

k: $y = ax + 1$ oftewel k: $ax - y + 1 = 0$



$MQ = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$

$M(3, 3)$ en $d(M, k) = 2$ geeft $\dfrac{|3a - 3 + 1|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$

$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2+1}$$
$$9a^2 - 12a + 4 = 4(a^2 + 1)$$
$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$
$$5a^2 - 12a = 0$$
$$a(5a - 12) = 0$$
$$a = 0 \vee 5a - 12 = 0$$
$$a = 0 \vee a = 2\tfrac{2}{5}$$

Dus k_1: $y = 1$ en k_2: $y = 2\frac{2}{5}x + 1$.

b $O(OAMB) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$

$A(0, 1)$ en $B(1, 0)$ geeft $AB = \sqrt{2}$.

$\sin(\frac{1}{2}\angle AMB) = \dfrac{\frac{1}{2}AB}{r_c} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

$\frac{1}{2}\angle AMB = 11{,}30...^\circ$

$\angle AMB = 22{,}61...^\circ$

De oppervlakte van cirkelsector ABM is $\dfrac{22{,}61...}{360} \cdot \pi \cdot (\sqrt{13})^2 = 2{,}566...$

Dus $O(V) = 3 - 2{,}566... \approx 0{,}43$.

c De middelloodlijn m van lijnstuk CD is de lijn m: $x = 5\frac{1}{2}$.

n is de middelloodlijn van lijnstuk CM.

Het midden van lijnstuk CM is $(\frac{1}{2}(5 + 3), \frac{1}{2}(0 + 3)) = (4, 1\frac{1}{2})$.

$\vec{n}_n = \vec{r}_{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ en n door $(4, 1\frac{1}{2})$ geeft n: $-2x + 3y = -3\frac{1}{2}$.

n snijden met m geeft het punt N.

$$\left.\begin{array}{l} -2x + 3y = -3\frac{1}{2} \\ x = 5\frac{1}{2} \end{array}\right\} -11 + 3y = -3\tfrac{1}{2}$$
$$3y = 7\tfrac{1}{2}$$
$$y = 2\tfrac{1}{2}$$

Dus $N(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$r_d = d(M, N) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6\frac{1}{2}}$, dus d: $(x - 5\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$

$$x^2 - 11x + 30\tfrac{1}{4} + y^2 - 5y + 6\tfrac{1}{4} = 6\tfrac{1}{2}$$
$$x^2 + y^2 - 11x - 5y + 30 = 0$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c: $(x-3)^2+(y-3)^2=13$
$x^2-6x+9+y^2-6y+9=13$
$x^2+y^2-6x-6y+5=0$

c snijden met d geeft $\begin{cases} x^2+y^2-6x-6y+5=0 \\ x^2+y^2-11x-5y+30=0 \end{cases}$ $-$

$5x-y-25=0$

$$\left.\begin{array}{l} y=5x-25 \\ x^2+y^2-6x-6y+5=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2+(5x-25)^2-6x-6(5x-25)+5=0 \\ x^2+25x^2-250x+625-6x-30x+150+5=0 \\ 26x^2-286x+780=0 \\ x^2-11x+30=0 \\ (x-5)(x-6)=0 \\ x=5 \vee x=6 \end{array}$$

$x=6$ geeft $y=5\cdot 6-25=5$, dus $E(6, 5)$.
De totale massa is $3+4+5+8=20$.

$$\vec{z}=\tfrac{1}{20}(3\cdot\vec{c}+4\cdot\vec{d}+5\cdot\vec{e}+8\cdot\vec{m})$$
$$=\tfrac{1}{20}\left(3\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+8\cdot\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right)$$
$$=\tfrac{1}{20}\left(\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24\\24\end{pmatrix}\right)$$
$$=\tfrac{1}{20}\begin{pmatrix}93\\49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\frac{13}{20}\\2\frac{9}{20}\end{pmatrix}$$

Dus $Z(4\frac{13}{20}, 2\frac{9}{20})$.

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

Bladzijde 75

51 **a** $x=3\cos(t) \wedge y=3\sin(t)$

b $x=3\cos(t) \xrightarrow{\text{translatie }(2,\,0)} x-2=3\cos(t)$ oftewel $x=2+3\cos(t)$

$y=3\sin(t) \xrightarrow{\text{translatie }(0,\,4)} y-4=3\sin(t)$ oftewel $y=4+3\sin(t)$

Straal 3 en middelpunt (2, 4).

Bladzijde 76

52 **a** $(x-5)^2+(y+1)^2=4$
$x^2-10x+25+y^2+2y+1=4$
$x^2+y^2-10x+2y+22=0$

b $(x-4)^2+(y-3)^2=1$
$x^2-8x+16+y^2-6y+9=1$
$x^2+y^2-8x-6y+24=0$

c $(x-2\frac{1}{2})^2+(y-3\frac{1}{2})^2=16$
$x^2-5x+6\frac{1}{4}+y^2-7y+12\frac{1}{4}=16$
$x^2+y^2-5x-7y+2\frac{1}{2}=0$

d $(x-1)^2+(y-2)^2=9$
$x^2-2x+1+y^2-4y+4=9$
$x^2+y^2-2x-4y-4=0$

53 **a** $x=-3+\sqrt{10}\cos(t) \wedge y=-4+\sqrt{10}\sin(t)$

b $x^2+y^2-4x-10y+13=0$
$x^2-4x+y^2-10y+13=0$
$(x-2)^2-4+(y-5)^2-25+13=0$
$(x-2)^2+(y-5)^2=16$
Dus $x=2+4\cos(t) \wedge y=5+4\sin(t)$.

c $x^2+y^2+2y=0$
$x^2+(y+1)^2-1=0$
$x^2+(y+1)^2=1$
Dus $x=\cos(t) \wedge y=-1+\sin(t)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

54 Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + 5\cos(t) \wedge y = 4 + 5\sin(t)$.
Het midden Q van $P(3 + 5\cos(t), 4 + 5\sin(t))$ en $A(-5, 2)$ is
$Q(\frac{1}{2}(3 + 5\cos(t) - 5), \frac{1}{2}(4 + 5\sin(t) + 2)) = Q(-1 + 2\frac{1}{2}\cos(t), 3 + 2\frac{1}{2}\sin(t))$.
Dus Q ligt op de cirkel $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6\frac{1}{4}$.

Bladzijde 77

55 $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$
$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 32 = 0$
$(x - 6)^2 - 36 + (y - 2)^2 - 4 + 32 = 0$
$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8$
Een parametervoorstelling van c_1 is $x = 6 + 2\sqrt{2}\cos(t) \wedge y = 2 + 2\sqrt{2}\sin(t)$.
Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2}\cos(t), 2 + 2\sqrt{2}\sin(t))$ en $A(2, 0)$ is
$Q(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2}\cos(t) + 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2}\sin(t) + 0)) = Q(4 + \sqrt{2}\cos(t), 1 + \sqrt{2}\sin(t))$.
Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2}\cos(t), 2 + 2\sqrt{2}\sin(t))$ en $B(-2, 4)$ is
$R(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2}\cos(t) - 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2}\sin(t) + 4)) = R(2 + \sqrt{2}\cos(t), 3 + \sqrt{2}\sin(t))$.
Het midden van Q en R is
$S(\frac{1}{2}(4 + \sqrt{2}\cos(t) + 2 + \sqrt{2}\cos(t)), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}\sin(t) + 3 + \sqrt{2}\sin(t))) = (3 + \sqrt{2}\cos(t), 2 + \sqrt{2}\sin(t))$.
Dus S doorloopt de cirkel c_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$ oftewel c_2: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$.

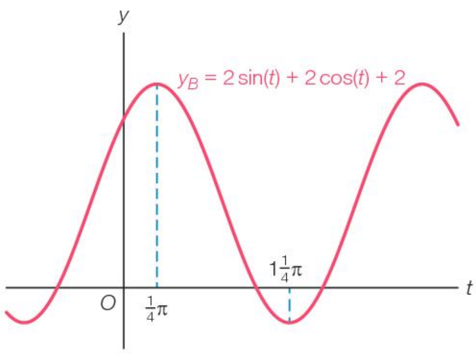
56 **a** $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2 - 2\sin(t) \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}_R = \begin{pmatrix} -2 - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2 + 2\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) + 2\cos(t) - 2 \\ 2\sin(t) + 2\cos(t) + 2 \end{pmatrix}$

Dus $x_B = -2\sin(t) + 2\cos(t) - 2 \wedge y_B = 2\sin(t) + 2\cos(t) + 2$.

b $\frac{dy_B}{dt} = 2\cos(t) - 2\sin(t)$

$\frac{dy_B}{dt} = 0$ geeft $2\cos(t) - 2\sin(t) = 0$
$\sin(t) = \cos(t)$
$\tan(t) = 1$
$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$



y_B is minimaal voor $t = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
$t = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $A(2\cos(1\frac{1}{4}\pi), 2 + 2\sin(1\frac{1}{4}\pi)) = A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$
$A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ op $y = ax$ geeft $-a\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$, dus $a = 1 - \sqrt{2}$.

c $x_B = -2\sin(t) + 2\cos(t) - 2 \wedge y_B = 2\sin(t) + 2\cos(t) + 2$ oftewel
$x_B + 2 = -2\sin(t) + 2\cos(t) \wedge y_B - 2 = 2\sin(t) + 2\cos(t)$

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 + (y - 2)^2 &= (-2\sin(t) + 2\cos(t))^2 + (2\sin(t) + 2\cos(t))^2 \\ &= 4\sin^2(t) - 8\sin(t)\cos(t) + 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + 8\sin(t)\cos(t) + 4\cos^2(t) \\ &= 8\sin^2(t) + 8\cos^2(t) \\ &= 8(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \\ &= 8\end{aligned}$$

Dus B doorloopt de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

57 **a** $x(3) = 3$ en $y(3) = -4$, dus $P(3, -4)$.

b $y = -1$ geeft $t^2 - 4t - 1 = -1$

$$t^2 - 4t = 0$$
$$t(t-4) = 0$$
$$t = 0 \vee t = 4$$

$t = 0$ geeft het punt $(6, -1)$ en $t = 4$ geeft het punt $(-\frac{2}{3}, -1)$.
De lengte van het lijnstuk is $6 - -\frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$.

c $x = 6$ geeft $\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 = 6$

$$\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t = 0$$
$$\frac{1}{3}t(t^2 - 9t + 15) = 0$$
$$\frac{1}{3}t = 0 \vee t^2 - 9t + 15 = 0$$
$$t = 0 \qquad D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 21$$
$$t = 0 \vee t = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \vee t = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$$

Bladzijde 79

58 **a** $(t^2 - 6t + 5)^2 = (t^2 - 6t + 5)(t^2 - 6t + 5) = t^4 - 6t^3 + 5t^2 - 6t^3 + 36t^2 - 30t + 5t^2 - 30t + 25 =$
$t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25$
$(2t - 4)^2 = 4t^2 - 16t + 16$
Dus $v(t) = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25 + 4t^2 - 16t + 16} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}$.

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}} \cdot (4t^3 - 36t^2 + 100t - 76) = \frac{2t^3 - 18t^2 + 50t - 38}{\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}}$$

b $x(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot -1 + 6 = -2\frac{1}{3}$ en $y(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot -1 - 1 = 4$
$x(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 6 = -2\frac{1}{3}$ en $y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 - 1 = 4$
Dus de baan van P snijdt zichzelf in het punt $(-2\frac{1}{3}, 4)$.

Bladzijde 80

59 **a** De verdubbelingsformule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$.

b $\cos(2t) + \sin(t) = 0$
$\cos(2t) = -\sin(t)$
$\cos(2t) = \sin(t + \pi)$
$\cos(2t) = \cos(t + \pi - \frac{1}{2}\pi)$
$\cos(2t) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$
$2t = t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -(t + \frac{1}{2}\pi) + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{6}\pi \vee t = 1\frac{5}{6}\pi$

c $y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(2 \cdot \frac{1}{2}\pi) = \sin(\pi) = 0$, dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve y-as.
$y(1\frac{5}{6}\pi) = \sin(2 \cdot 1\frac{5}{6}\pi) = \sin(3\frac{2}{3}\pi) = \sin(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve y-as.

d $x'(\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
$x'(\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(1\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
$x'(1\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(2\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
$x'(1\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(3\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$

60 **a** Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
$x'(t) = 0$ geeft $-2\sin(2t) + \cos(t) = 0$

$$-4\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = 0$$
$$\cos(t)(-4\sin(t) + 1) = 0$$
$$\cos(t) = 0 \vee 4\sin(t) = 1$$
$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{4}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left.\begin{array}{l}\sin(t)=\frac{1}{4}\\ \sin^2(t)+\cos^2(t)=1\end{array}\right\}$ $(\frac{1}{4})^2+\cos^2(t)=1$

$\frac{1}{16}+\cos^2(t)=1$

$\cos^2(t)=\frac{15}{16}$

$\cos(t)=\frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t)=-\frac{1}{4}\sqrt{15}$

c Met de verdubbelingsformules $\cos(2A)=1-2\sin^2(A)$ en $\sin(2A)=2\sin(A)\cos(A)$ krijg je

$\begin{cases} x(t)=\cos(2t)+\sin(t)=1-2\sin^2(t)+\sin(t)\\ y(t)=\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)\end{cases}$

d $\cos(t)=0$ met $0\le t\le 2\pi$ geeft $t=\frac{1}{2}\pi \vee t=1\frac{1}{2}\pi$.

$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 0)$

$t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-2, 0)$

$\sin(t)=\frac{1}{4}$ en $\cos(t)=\frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x=1-2\cdot(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$ en $y=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15}=\frac{1}{8}\sqrt{15}$.

$\sin(t)=\frac{1}{4}$ en $\cos(t)=-\frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x=1-2\cdot(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$ en $y=2\cdot\frac{1}{4}\cdot-\frac{1}{4}\sqrt{15}=-\frac{1}{8}\sqrt{15}$.

De punten zijn $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(1\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{15})$ en $(1\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{15})$.

61 **a** $\begin{cases} x(t)=t^2-3t+2\\ y(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t-1\end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t)=2t-3\\ y'(t)=t^2-4t+3\end{cases}$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t)=0 \wedge x'(t)\neq 0$.

$y'(t)=0$ geeft $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$t=1 \vee t=3$

$t=1$ geeft het punt $(0, \frac{1}{3})$

$t=3$ geeft het punt $(2, -1)$

b $x(t)=0$ geeft $t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$t=1 \vee t=2$

$y(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2-1=-\frac{1}{3}$, dus raakpunt $(0, -\frac{1}{3})$.

$\vec{v}(2)=\begin{pmatrix} 2\cdot 2-3\\ 2^2-4\cdot 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

k: $x+y=c$ door $(0, -\frac{1}{3})$ geeft k: $x+y=-\frac{1}{3}$ oftewel k: $3x+3y=-1$.

c $x(t)=2$ geeft $t^2-3t+2=2$

$t^2-3t=0$

$t(t-3)=0$

$t=0 \vee t=3$

$x(0)=2$ en $y(0)=-1$

$x(3)=2$ en $y(3)=-1$ (zie a)

Dus de baan snijdt zichzelf in het punt $(2, -1)$.

$\vec{v}(0)=\begin{pmatrix} 2\cdot 0-3\\ 0^2-4\cdot 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$, dus in het punt waarvoor $t=0$ heeft de raaklijn richtingscoëfficiënt -1.

In het punt waarvoor $t=3$ is de raaklijn horizontaal (zie a).

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is 45°.

d Voor het snijpunt met de positieve y-as geldt $t=1$ (zie b).

$\vec{v}(1)=\begin{pmatrix} 2\cdot 1-3\\ 1^2-4\cdot 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ geeft $v(1)=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$

De gevraagde baansnelheid is 1 cm/s.

$v(t)=\sqrt{(2t-3)^2+(t^2-4t+3)^2}$ geeft

$$a(t)=\frac{1}{2\sqrt{(2t-3)^2+(t^2-4t+3)^2}}\cdot(2(2t-3)\cdot 2+2(t^2-4t+3)\cdot(2t-4))=\frac{2(2t-3)+(t^2-4t+3)(2t-4)}{\sqrt{(2t-3)^2+(t^2-4t+3)^2}}$$

$$a(1)=\frac{2(2-3)+(1-4+3)(2-4)}{\sqrt{(2-3)^2+(1-4+3)^2}}=\frac{2\cdot -1+0\cdot -2}{\sqrt{1+0}}=-2$$

De gevraagde baanversnelling is -2 cm/s^2.

Bladzijde 81

62 **a** $x(t) = 0$ geeft $\cos(t) + \sin(2t) = 0$

$$\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$$
$$\cos(t)(1 + 2\sin(t)) = 0$$
$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\tfrac{1}{2}$$
$$t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \tfrac{1}{2}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{2}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{6}\pi \vee t = 1\tfrac{5}{6}\pi$$

$y(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi) - \cos(\pi) = 1 - -1 = 2$

$y(1\tfrac{1}{2}\pi) = \sin(1\tfrac{1}{2}\pi) - \cos(3\pi) = -1 - -1 = 0$

$y(1\tfrac{1}{6}\pi) = \sin(1\tfrac{1}{6}\pi) - \cos(2\tfrac{1}{3}\pi) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = -1$

$y(1\tfrac{5}{6}\pi) = \sin(1\tfrac{5}{6}\pi) - \cos(3\tfrac{2}{3}\pi) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = -1$

Er zit $1\tfrac{5}{6}\pi - 1\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{4}{6}\pi = \tfrac{2}{3}\pi$ seconden tussen deze twee tijdstippen.

b $x(p) = \cos(p) + \sin(2p)$

$x(\pi - p) = \cos(\pi - p) + \sin(2(\pi - p)) = -\cos(p) + \sin(2\pi - 2p) = -\cos(p) - \sin(2p)$

Dus $x(p) = -x(\pi - p)$.

$y(p) = \sin(p) - \cos(2p)$

$y(\pi - p) = \sin(\pi - p) - \cos(2(\pi - p)) = \sin(p) - \cos(2\pi - 2p) = \sin(p) - \cos(2p)$

Dus $y(p) = y(\pi - p)$.

Dus de baan van P is symmetrisch in de y-as.

c $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t) \\ y'(t) = \cos(t) + 2\sin(2t) \end{cases}$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $\cos(t) + 2\sin(2t)$

$$\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) = 0$$
$$\cos(t)(1 + 4\sin(t)) = 0$$
$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\tfrac{1}{4}$$
$$t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee \sin(t) = -\tfrac{1}{4}$$

$t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \tfrac{1}{2}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{2}\pi$.

$t = \tfrac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 2)$

$t = 1\tfrac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 0)$

$\left.\begin{array}{l} \sin(t) = -\tfrac{1}{4} \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \end{array}\right\} (-\tfrac{1}{4})^2 + \cos^2(t) = 1$

$$\tfrac{1}{16} + \cos^2(t) = 1$$
$$\cos^2(t) = \tfrac{15}{16}$$
$$\cos(t) = \tfrac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\tfrac{1}{4}\sqrt{15}$$

$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) = \sin(t) - 2\cos^2(t) + 1 \end{cases}$

Je krijgt $\begin{cases} x = \tfrac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{15} = \tfrac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\tfrac{1}{4} - 2 \cdot \tfrac{15}{16} + 1 = -1\tfrac{1}{8} \end{cases}$ en $\begin{cases} x = -\tfrac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\tfrac{1}{4} \cdot -\tfrac{1}{4}\sqrt{15} = -\tfrac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\tfrac{1}{4} - 2 \cdot \tfrac{15}{16} + 1 = -1\tfrac{1}{8} \end{cases}$

Dus horizontale raaklijn in $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\tfrac{1}{8}\sqrt{15}, -1\tfrac{1}{8})$ en $(-\tfrac{1}{8}\sqrt{15}, -1\tfrac{1}{8})$.

d $(x'(t))^2 = (-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 = \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t)$

$(y'(t))^2 = (\cos(t) + 2\sin(2t))^2 = \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t)$

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t) \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 4\sin(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\sin(t) \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 4(\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t)) \\ &= 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \sin(t) \\ &= 5 + 4\sin(t) \end{aligned}$$

Dus $v(t) = \sqrt{5 + 4\sin(t)}$.

e $\sin(t)$ is maximaal 1 en minimaal -1.

De maximale baansnelheid is $\sqrt{5 + 4 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3$ m/s.

De minimale baansnelheid is $\sqrt{5 + 4 \cdot -1} = \sqrt{1} = 1$ m/s.

© Noordhoff Uitgevers bv

f $v(t) = \sqrt{5 + 4\sin(t)}$ geeft $a(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{5 + 4\sin(t)}} \cdot 4\cos(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{5 + 4\sin(t)}}$

$a(\pi) = \dfrac{2\cos(\pi)}{\sqrt{5 + 4\sin(\pi)}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$ m/s^2

63 **a** $t = 1$ geeft $P(-4, -4)$ en $Q(2, 5)$.
$PQ = \sqrt{(2 - -4)^2 + (5 - -4)^2} = \sqrt{117}$ cm

b $x = -t + 3$ oftewel $t = -x + 3$
Dit geeft $y = 3(-x + 3) + 2 = -3x + 9 + 2 = -3x + 11$.
Een vergelijking van de baan van Q is $y = -3x + 11$.

c $x_P(t) = x_Q(t) \wedge y_P(t) = y_Q(t)$
$t^2 - 2t - 3 = -t + 3 \wedge t^2 + t - 6 = 3t + 2$
$t^2 - t - 6 = 0 \wedge t^2 - 2t - 8 = 0$
$(t + 2)(t - 3) = 0 \wedge (t + 2)(t - 4) = 0$
$(t = -2 \vee t = 3) \wedge (t = -2 \vee t = 4)$
$t = -2$

$\begin{cases} x'_P(t) = 2t - 2 \\ y'_P(t) = 2t + 1 \end{cases}$ en $\begin{cases} x'_Q(t) = -1 \\ y'_Q(t) = 3 \end{cases}$

Voor de baan van P geldt $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=-2} = \dfrac{2 \cdot -2 + 1}{2 \cdot -2 - 2} = \frac{1}{2}$.

Voor de baan van Q geldt $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$.

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$
$\tan(\beta) = -3$ geeft $\beta = -71{,}56...°$
$\alpha - \beta = 98{,}13...°$
Dus de hoek tussen de banen is ongeveer $180° - 98° = 82°$.

d $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_P = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_Q$ geeft $\dfrac{2t + 1}{2t - 2} = \dfrac{3}{-1}$
$6t - 6 = -2t - 1$
$8t = 5$
$t = \frac{5}{8}$

$t = \frac{5}{8}$ geeft het punt $(-3\frac{55}{64}, -4\frac{63}{64})$.

e $\vec{v}_P(t) = \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{a}_P(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_P(t) \perp \vec{a}_P(t)$ geeft $\begin{pmatrix} 2t - 2 \\ 2t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
$4t - 4 + 4t + 2 = 0$
$8t = 2$
$t = \frac{1}{4}$

$t = \frac{1}{4}$ geeft het punt $(-3\frac{7}{16}, -5\frac{11}{16})$.

f $y_P(t) = 0$ geeft $t^2 + t - 6 = 0$
$(t - 2)(t + 3) = 0$
$t = 2 \vee t = -3$

$t = 2$ geeft het punt $(-3, 0)$.

$\vec{v}_P(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $v_P(2) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ cm/s

$v_P(t) = \sqrt{(2t - 2)^2 + (2t + 1)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 + 4t + 1} = \sqrt{8t^2 - 4t + 5}$ geeft

$a_P(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 5}} \cdot (16t - 4) = \dfrac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 5}}$

$a_P(2) = \dfrac{16 - 2}{\sqrt{32 - 8 + 5}} = \dfrac{14}{\sqrt{29}} = \frac{14}{29}\sqrt{29}$ cm/s^2

Bladzijde 82

64 **a** $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) - \sin(t) = 0$

$$1 - 2\sin^2(t) - \sin(t) = 0$$
$$\sin^2(t) + \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$(\sin(t) + 1)(\sin(t) - \tfrac{1}{2}) = 0$$
$$\sin(t) = -1 \vee \sin(t) = \tfrac{1}{2}$$
$$t = -\tfrac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ geeft } t = 1\tfrac{1}{2}\pi \vee t = \tfrac{1}{6}\pi \vee t = \tfrac{5}{6}\pi$$

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = -1$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus op dit tijdstip is $x_P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b $x(t) = y(t)$ geeft $\sin(2t) + \cos(2t) = \cos(2t) - \sin(t)$

$$\sin(2t) = -\sin(t)$$
$$2\sin(t)\cos(t) = -\sin(t)$$
$$\sin(t) = 0 \vee 2\cos(t) = -1$$
$$t = k \cdot \pi \vee \cos(t) = -\tfrac{1}{2}$$
$$t = k \cdot \pi \vee t = \tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\tfrac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$0 < t < 2\pi \text{ geeft } t = \pi \vee t = \tfrac{2}{3}\pi \vee t = 1\tfrac{1}{3}\pi$$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$t = \pi$ geeft het punt $(1, 1)$

$t = 1\frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$

c $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \cos(2t) \\ y(t) = \cos(2t) - \sin(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) - 2\sin(2t) \\ y'(t) = -2\sin(2t) - \cos(t) \end{cases}$

$v(t) = \sqrt{(2\cos(2t) - 2\sin(2t))^2 + (-2\sin(2t) - \cos(t))^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(2\cos(2x) - 2\sin(2x))^2 + (-2\sin(2x) - \cos(x))^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 2{,}62$ en $y \approx 3{,}77$.

De maximale snelheid van P is ongeveer 3,77.

d $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) - 2\sin(0) \\ -2\sin(0) - \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi) - 2\sin(2\pi) \\ -2\sin(2\pi) - \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

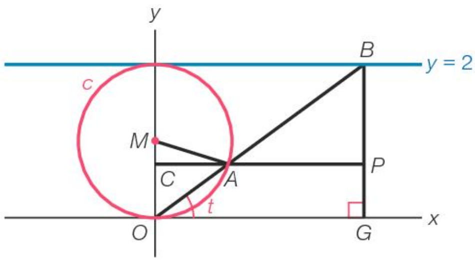
$$\cos(\angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi))) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2 \cdot 2 + -1 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Dus $\angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi)) \approx 53{,}1°$.

65 **a** $\left.\begin{array}{l} \sin(t) = \dfrac{2}{OB} \text{ geeft } OB = \dfrac{2}{\sin(t)} \\ \cos(t) = \dfrac{x_P}{OB} \text{ geeft } x_P = OB\cos(t) \end{array}\right\} x_P = \dfrac{2}{\sin(t)} \cdot \cos(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)}$

 © Noordhoff Uitgevers bv

b



$\angle GOB = t$ geeft $\angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t$

$\triangle OAM$ is gelijkbenig, dus $\angle MAO = \angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t$.

Hoekensom driehoek in $\triangle OAM$ geeft $\angle OMA = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) - (\frac{1}{2}\pi - t) = 2t$.

$\cos(\angle OMA) = \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{1 - y_P}{1} = 1 - y_P$ geeft $y_P = 1 - \cos(\angle OMA)$

Dus $y_P = 1 - \cos(2t)$.

c $y = \frac{1}{2}$ geeft $1 - \cos(2t) = \frac{1}{2}$

$$\cos(2t) = \tfrac{1}{2}$$
$$2t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$
$$0 < t < \pi \text{ geeft } t = \tfrac{1}{6}\pi \vee t = \tfrac{5}{6}\pi$$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x = \dfrac{2\cos(\frac{1}{6}\pi)}{\sin(\frac{1}{6}\pi)} = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x = \dfrac{2\cos(\frac{5}{6}\pi)}{\sin(\frac{5}{6}\pi)} = \dfrac{2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3}$

$CD = 2\sqrt{3} - -2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

d $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\sin(t) \cdot -2\sin(t) - 2\cos(t) \cdot \cos(t)}{\sin^2(t)} = \dfrac{-2}{\sin^2(t)} \\ y'(t) = 2\sin(2t) \end{cases}$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $v(\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{(\frac{1}{2})^2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 8 \end{pmatrix}$.

$x(\frac{1}{6}\pi) = 2\sqrt{3}$ (zie c) en $y(\frac{1}{6}\pi) = 1 - \cos(\frac{1}{3}\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x\sqrt{3} + 8y = c \\ \text{door } (2\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \end{array}\right\} c = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 10$

Dus k: $x\sqrt{3} + 8y = 10$.

e $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases}$ invullen in $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ geeft $1 - \cos(2t) = \dfrac{8}{\left(\dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 + 4}$

$$1 - (1 - 2\sin^2(t)) = \frac{8}{\dfrac{4\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 4}$$
$$2\sin^2(t) = \frac{2}{\dfrac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 1}$$
$$2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) = 2$$
$$2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 2$$
$$2 \cdot 1 = 2$$

Dit klopt voor elke t, dus voor de baan van P geldt $y(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

f $y(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$ geeft $y'(x) = \dfrac{0 - 8 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-16x}{(x^2+4)^2}$ en

$y''(x) = \dfrac{(x^2+4)^2 \cdot -16 - -16x \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \dfrac{-16(x^2+4) + 64x^2}{(x^2+4)^3} = \dfrac{48x^2 - 64}{(x^2+4)^3}$

$y''(x) = 0$ geeft $48x^2 - 64 = 0$

$48x^2 = 64$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ geeft $y = \dfrac{8}{\frac{4}{3}+4} = \dfrac{24}{4+12} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$ en $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ geeft $y = 1\frac{1}{2}$.

Dus de buigpunten zijn $(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2})$ en $(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2})$.

Diagnostische toets

Bladzijde 86

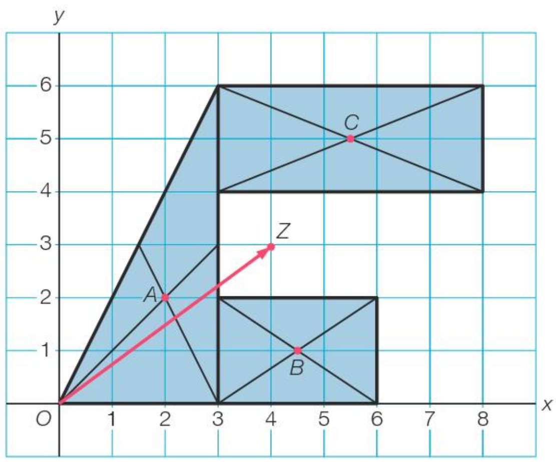
1 Zie de figuur hiernaast.
A heeft massa 9.
B heeft massa 6.
C heeft massa 10.
De totale massa is $9 + 6 + 10 = 25$.

$\vec{z} = \frac{1}{25}(9 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 10 \cdot \vec{c})$

$= \frac{1}{25}\left(9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{25}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ 50 \end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\frac{24}{25} \end{pmatrix}$



2 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

$\vec{r}_b = 5 \cdot \overrightarrow{AB} + 13 \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

b: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } m\text{: } 12x + 5y = c \\ m \text{ door } (\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2}) \end{array}\right\} m\text{: } 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$

m snijden met b geeft $12(-1 + 3t) + 5(-2 + 11t) = 62\frac{1}{2}$

$-12 + 36t - 10 + 55t = 62\frac{1}{2}$

$91t = 84\frac{1}{2}$

$t = \frac{13}{14}$

$t = \frac{13}{14}$ geeft $x = -1 + \frac{13}{14} \cdot 3 = 1\frac{11}{14}$ en $y = -2 + \frac{13}{14} \cdot 11 = 8\frac{3}{14}$.

Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking

$\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ en AB: $5x - 12y = 19$.

$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en AC: $4x + 3y = -10$.

$P(x, y)$ op b en $d(P, AB) = d(P, AC)$ geeft

$\dfrac{|5x - 12y - 19|}{\sqrt{169}} = \dfrac{|4x + 3y + 10|}{\sqrt{25}}$

$\dfrac{|5x - 12y - 19|}{13} = \dfrac{|4x + 3y + 10|}{5}$

$13 \cdot |4x + 3y + 10| = 5 \cdot |5x - 12y - 19|$

$13(4x + 3y + 10) = 5(5x - 12y - 19) \vee 13(4x + 3y + 10) = 5(-5x + 12y + 19)$

$52x + 39y + 130 = 25x - 60y - 95 \vee 52x + 39y + 130 = -25x + 60y + 95$

$27x + 99y = -225 \vee 77x - 21y = -35$

$3x + 11y = -25 \vee 11x - 3y = -5$

Uit de figuur die bij de situatie hoort, volgt b: $11x - 3y = -5$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\text{, dus } m\text{: } 12x + 5y = c \\ m \text{ door } (\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2}) \end{array}\right\} m\text{: } 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$

m snijden met b geeft het punt S.

$\begin{cases} 12x + 5y = 62\frac{1}{2} \\ 11x - 3y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ oftewel $\begin{cases} 36x + 15y = 187\frac{1}{2} \\ 55x - 15y = -25 \end{cases}$ +

$91x = 162\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{11}{14} \\ 12x + 5y = 62\frac{1}{2} \end{array}\right\} 12 \cdot 1\frac{11}{14} + 5y = 62\frac{1}{2}$

$21\frac{3}{7} + 5y = 62\frac{1}{2}$

$5y = 41\frac{1}{14}$

$y = 8\frac{3}{14}$

Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

3 Stel $M(3p, p)$ is een punt op m.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\dfrac{|2 \cdot 3p - p|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|3p - 2 \cdot p + 8|}{\sqrt{5}}$

$|5p| = |p + 8|$

$5p = p + 8 \vee 5p = -p - 8$

$4p = 8 \vee 6p = -8$

$p = 2 \vee p = -1\frac{1}{3}$

$p = 2$ geeft $M_1(6, 2)$ en $r_1 = d(M_1, k) = \dfrac{|5 \cdot 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

Dus c_1: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

$p = -1\frac{1}{3}$ geeft $M_2(-4, -1\frac{1}{3})$ en $r_2 = d(M_2, k) = \dfrac{|5 \cdot -1\frac{1}{3}|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\frac{2}{3}}{\sqrt{5}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Dus c_2: $(x + 4)^2 + (y + 1\frac{1}{3})^2 = 8\frac{8}{9}$.

4 **a** Zie de figuur hiernaast.

Stel de straal van d is gelijk aan r.

Dan is $NP = 5 - r$, $MP = 4 - r$ en $MN = r + 4$.

De stelling van Pythagoras geeft

$NP^2 + MP^2 = MN^2$

$(5 - r)^2 + (4 - r)^2 = (r + 4)^2$

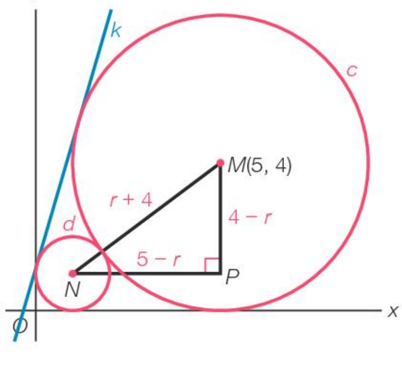
$25 - 10r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2 + 8r + 16$

$r^2 - 26r + 25 = 0$

$(r - 1)(r - 25) = 0$

$r = 1 \vee r = 25$ (vold. niet)

Dus $N(1, 1)$ en d: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.



b Stel het middelpunt van cirkel e is Q.
Stel l: $y = ax + b$ oftewel l: $ax - y + b = 0$.

$d(Q, l) = 3$ geeft $\dfrac{|3a - 3 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ oftewel $|3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$.

$d(M, l) = 4$ geeft $\dfrac{|5a - 4 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4$ oftewel $|5a - 4 + b| = 4\sqrt{a^2 + 1}$.

Hieruit volgt $3 \cdot |5a - 4 + b| = 4 \cdot |3a - 3 + b|$

$$|15a - 12 + 3b| = |12a - 12 + 4b|$$
$$15a - 12 + 3b = 12a - 12 + 4b \vee 15a - 12 + 3b = -12a + 12 - 4b$$
$$3a - b = 0 \vee 27a - 24 + 7b = 0$$
$$b = 3a \vee 27a - 24 + 7b = 0$$

$b = 3a$ invullen in $|3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|3a - 3 + 3a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

$$|6a - 3| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$
$$|2a - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$$
$$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 1$$
$$3a^2 - 4a = 0$$
$$a(3a - 4) = 0$$
$$a = 0 \vee a = \tfrac{4}{3}$$

$a = 0$ geeft de raaklijn $y = 0$.
$a = \frac{4}{3}$ geeft $b = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ en dit geeft de raaklijn $y = \frac{4}{3}x + 4$.
Dus l_1: $y = 0$ en l_2: $y = 1\frac{1}{3}x + 4$.

5 **a** $y = ax + 2$ substitueren in $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft

$$(x - 3)^2 + (ax)^2 = 4$$
$$x^2 - 6x + 9 + a^2x^2 = 4$$
$$(a^2 + 1)x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 36 - 20a^2 - 20 = -20a^2 + 16$$

$D > 0$ geeft $-20a^2 + 16 > 0$

$$-20a^2 > -16$$
$$a^2 < \tfrac{4}{5}$$
$$-\sqrt{\tfrac{4}{5}} < a < \sqrt{\tfrac{4}{5}}$$
$$-\tfrac{2}{5}\sqrt{5} < a < \tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

b l: $y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel l: $x - 2y + 2b = 0$
Van c is het middelpunt $M(3, 2)$ en de straal $r = 2$.

$d(M, l) > 2$ geeft $\dfrac{|3 - 4 + 2b|}{\sqrt{5}} > 2$

$$|-1 + 2b| > 2\sqrt{5}$$
$$-1 + 2b < -2\sqrt{5} \vee -1 + 2b > 2\sqrt{5}$$
$$2b < 1 - 2\sqrt{5} \vee 2b > 1 + 2\sqrt{5}$$
$$b < \tfrac{1}{2} - \sqrt{5} \vee b > \tfrac{1}{2} + \sqrt{5}$$

Bladzijde 87

6 **a** c_2: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15$$

c_1 en c_2 snijden geeft de punten A en B.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15 \end{cases} \quad -$$
$$12x + 4y = 20$$
$$3x + y = 5$$

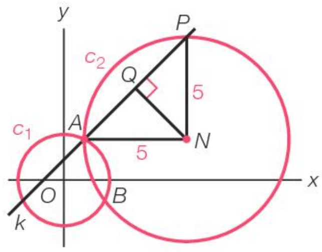
© Noordhoff Uitgevers bv

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + (-3x+5)^2 = 5 \\ x^2 + 9x^2 - 30x + 25 = 5 \\ 10x^2 - 30x + 20 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ (x-1)(x-2) = 0 \end{array}$$

$$x = 1 \vee x = 2$$

$x = 2$ en $y = -3x + 5$ geeft het punt $B(2, -1)$.

b Zie de figuur hiernaast met Q het midden van lijnstuk AP en NQ loodrecht op k.



De stelling van Pythagoras in driehoek ANQ geeft

$NQ = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 12\frac{1}{2}} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

k: $y = ax + b$ door $A(1, 2)$ geeft $a + b = 2$ oftewel $b = 2 - a$.

Dus k: $y = ax + 2 - a$ oftewel k: $ax - y + 2 - a$.

$$d(N, k) = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|6a - 2 + 2 - a|}{\sqrt{a^2+1}} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|5a| = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2}$$

$$25a^2 = 6\tfrac{1}{4}(2a^2+2)$$

$$25a^2 = 12\tfrac{1}{2}a^2 + 12\tfrac{1}{2}$$

$$12\tfrac{1}{2}a^2 = 12\tfrac{1}{2}$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1 \vee a = -1$$

$a = 1$ geeft k_1: $y = x + 1$ en $a = -1$ geeft k_2: $y = -x + 3$.

7 Een parametervoorstelling van c is $x = 6 + 4\cos(t) \wedge y = 4 + 4\sin(t)$.
Het midden Q van $P(6 + 4\cos(t), 4 + 4\sin(t))$ en $A(-4, 2)$ is
$Q(\frac{1}{2}(6 + 4\cos(t) - 4), \frac{1}{2}(4 + 4\sin(t) + 2)) = Q(1 + 2\cos(t), 3 + 2\sin(t))$.
Dus Q ligt op de cirkel $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

8 **a** $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = -3t^2 + 6t + 9 \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$-3t^2 + 6t + 9 = 0 \wedge 2t \neq 0$$
$$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$$
$$(t+1)(t-3) = 0 \wedge t \neq 0$$
$$(t = -1 \vee t = 3) \wedge t \neq 0$$
$$t = -1 \vee t = 3$$

$t = -1$ geeft het punt $(1, -5)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 27)$.
Dus de raaklijn is evenwijdig met de x-as in de punten $(1, -5)$ en $(9, 27)$.
Raaklijn evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t = 0 \wedge t \neq -1 \wedge t \neq 3$$
$$t = 0$$

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.
Dus de raaklijn is evenwijdig met de y-as in het punt $(0, 0)$.

b $t = 2$ geeft $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$t = 2$ geeft $A(4, 22)$

$$\left.\begin{array}{l} 9x - 4y = c \\ A(4, 22) \end{array}\right\} c = 9 \cdot 4 - 4 \cdot 22 = -52$$

Dus k: $9x - 4y = -52$.

c $x = 9$ geeft $t^2 = 9$

$$t = -3 \vee t = 3$$

Zie vraag a, $t = 3$ geeft een horizontale raaklijn.

$$t = -3 \text{ geeft } \mathrm{rc}_{\text{raaklijn}} = \frac{y'(-3)}{x'(-3)} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$\tan(\varphi) = 6$ geeft $\varphi \approx 80{,}5°$

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is $\varphi \approx 80{,}5°$.

d $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ -3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot -1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

De baansnelheid in C is 2 cm/s.

$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2} = \sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2}$ en

$a(t) = v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2}} \cdot (8t + 2 \cdot (-3t^2 + 6t + 9) \cdot (-6t + 6))$

$a(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{4 + (-3 - 6 + 9)^2}} \cdot (-8 + 2 \cdot (-3 - 6 + 9) \cdot (6 + 6)) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-8 + 2 \cdot 0 \cdot 12) = \dfrac{-8}{4} = -2$

Dus de baanversnelling is -2 cm/s^2.

9 **a** $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = t + \cos(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = 1 - \sin(t) \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$1 - \sin(t) = 0 \wedge 2\cos(2t) \neq 0$

$\sin(t) = 1 \wedge 2t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \wedge t \neq \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

t in $[-\pi, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de x-as in het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Raaklijn evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \wedge t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

t in $[-\pi, \pi]$ geeft $t = -\frac{3}{4}\pi \vee t = -\frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi$

$t = -\frac{3}{4}\pi$ geeft $(1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$

$t = -\frac{1}{4}\pi$ geeft $(-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$

$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $(1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $(-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$

Dus de raaklijn is evenwijdig met de y-as in de punten $(1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

b $v(t) = \sqrt{(2\cos(2t))^2 + (1 - \sin(t))^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(2\cos(2x))^2 + (1 - \sin(x))^2}$.

De optie maximum geeft $x = -1{,}57079...$ en $y = 2{,}828...$

$x(-1{,}57079...) = 0$ en $y(-1{,}57079...) = -1{,}57079... = -\frac{1}{2}\pi$

Dus de baansnelheid is maximaal in A.

Marijke heeft dus gelijk.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 Afgeleiden en primitieven

Voorkennis Lengten van lijnstukken

Bladzijde 91

1 $f(x) = 7\frac{1}{2}$ geeft $8\sqrt{x} - 2x = 7\frac{1}{2}$

$$8\sqrt{x} = 2x + 7\tfrac{1}{2}$$
$$16\sqrt{x} = 4x + 15$$
$$256x = 16x^2 + 120x + 225$$
$$16x^2 - 136x + 225 = 0$$
$$D = (-136)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 225 = 4096$$
$$x = \frac{136 + 64}{32} = 6\tfrac{1}{4} \vee x = \frac{136 - 64}{32} = 2\tfrac{1}{4}$$

Dus $EF = 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = 4$.

Bladzijde 92

2 Rechts van het snijpunt van de grafieken ligt de grafiek van g boven de grafiek van f, dus geldt dan $CD = g(p) - f(p)$.

$CD = 8$ geeft $p - 3 - (8\sqrt{p} - 2p) = 8$

$$p - 3 - 8\sqrt{p} + 2p = 8$$
$$3p - 11 = 8\sqrt{p}$$
$$9p^2 - 66p + 121 = 64p$$
$$9p^2 - 130p + 121 = 0$$
$$D = (-130)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 121 = 12\,544$$
$$p = \frac{130 + 112}{18} = 13\tfrac{4}{9} \vee p = \frac{130 - 112}{18} = 1$$

$p = 1$ voldoet niet, dus $p = 13\frac{4}{9}$.

3 **a** $A(0, -4)$ en k: $y = -4$

$f(x) = -4$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 = -4$

$$\tfrac{1}{2}x^2 - 2x = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x(x - 4) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus $B(4, -4)$.

$g(x) = -4$ geeft $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 4 = -4$

$$-\tfrac{1}{4}x^2 + 3x = 0$$
$$\tfrac{1}{4}x(-x + 12) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 12$$

Dus $C(12, -4)$.

$A(0, -4)$ en $B(4, -4)$ geeft $AB = 4 - 0 = 4$

$B(4, -4)$ en $C(12, -4)$ geeft $BC = 12 - 4 = 8$

Dus $AB : BC = 4 : 8 = 1 : 2$.

b $DE = 8$, dus $|f(p) - g(p)| = 8$

$$\left|\tfrac{1}{2}p^2 - 2p - 4 - (-\tfrac{1}{4}p^2 + 3p - 4)\right| = 8$$
$$\left|\tfrac{1}{2}p^2 - 2p - 4 + \tfrac{1}{4}p^2 - 3p + 4\right| = 8$$
$$\left|\tfrac{3}{4}p^2 - 5p\right| = 8$$
$$\tfrac{3}{4}p^2 - 5p = 8 \vee \tfrac{3}{4}p^2 - 5p = -8$$
$$\tfrac{3}{4}p^2 - 5p - 8 = 0 \quad \vee \tfrac{3}{4}p^2 - 5p + 8 = 0$$
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot -8 = 49 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot 8 = 1$$
$$p = \frac{5 + 7}{1\frac{1}{2}} = 8 \vee p = \frac{5 - 7}{1\frac{1}{2}} = -1\tfrac{1}{3} \vee p = \frac{5 + 1}{1\frac{1}{2}} = 4 \vee p = \frac{5 - 1}{1\frac{1}{2}} = 2\tfrac{2}{3}$$

Dus $DE = 8$ voor $p = -1\frac{1}{3} \vee p = 2\frac{2}{3} \vee p = 4 \vee p = 8$.

4 **a** $f(x) = x\,e^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x\,e^x$

b $f'(x) = 0$ geeft $e^x + x\,e^x = 0$

$$e^x(1 + x) = 0$$
$$x = -1$$

$f(-1) = -\frac{1}{e}$, dus $A\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ en k: $y = -\frac{1}{e}$.

$g(x) = -\frac{1}{e}$ geeft $2x - 1 = -\frac{1}{e}$

$$2x = 1 - \frac{1}{e}$$
$$x = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

Dus $B\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{2e}, -\frac{1}{e}\right)$.

$A\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ en $B\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{2e}, -\frac{1}{e}\right)$ geeft $AB = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2e} - -1 = 1\tfrac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

c $f(p) - g(p) = 1$ geeft $p\,e^p - (2p - 1) = 1$

$$p\,e^p - 2p + 1 = 1$$
$$p\,e^p - 2p = 0$$
$$p(e^p - 2) = 0$$
$$p = 0 \vee e^p = 2$$
$$p = 0 \vee p = \ln(2)$$

15.1 Lijnstukproblemen

Bladzijde 93

1 **a** $AB : BC = 1 : 2$, dus $BC = 2AB$.

$AB = x_B = p$

$x_C = AC = AB + BC = AB + 2AB = 3AB = 3p$

b $y_B = f(p) = e^p$

$y_C = g(p) = e^{3p - 3}$

$y_B = y_C$, dus $e^p = e^{3p - 3}$.

Dit geeft $p = 3p - 3$

$$-2p = -3$$
$$p = 1\tfrac{1}{2}$$

c $q = f(p) = f(1\tfrac{1}{2}) = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$

2 **a** Vermenigvuldigen van beide leden van $e^{-p} = 3\,e^{-3p}$ met e^{3p} geeft $e^{2p} = 3$.

b $e^{-\frac{1}{2} \cdot \ln(3)} = (e^{\ln(3)})^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

Bladzijde 94

3 Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 2p$.

$f(p) = f(2p)$ geeft $6p\,e^{-p} = 12p\,e^{-2p}$

$$6p = 0 \vee e^{-p} = 2\,e^{-2p}$$
$$p = 0 \;\vee\; e^p = 2$$

vold. niet $p = \ln(2)$

$q = f(p) = f(\ln(2)) = 6\ln(2) \cdot e^{-\ln(2)} = 6\ln(2) \cdot 2^{-1} = 3\ln(2)$

4 **a** Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 3p$.

$f(p) = g(3p)$ geeft $\ln(p) = \ln(3p - 3)$

$$p = 3p - 3$$
$$-2p = -3$$
$$p = 1\tfrac{1}{2}$$

$q = f(p) = f(1\tfrac{1}{2}) = \ln(1\tfrac{1}{2})$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left.\begin{array}{l} y_F = f(r) \\ y_E = g(r) \\ y_F = 2 \cdot y_E \end{array}\right\} f(r) = 2 \cdot g(r)$

$f(r) = 2 \cdot g(r)$ geeft $\ln(r) = 2 \cdot \ln(r-3)$

$\ln(r) = \ln((r-3)^2)$

$r = (r-3)^2$

$r = r^2 - 6r + 9$

$r^2 - 7r + 9 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$

$r = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \vee r = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$

vold. niet

Dus $r = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

5 **a** $q = f(p) = g(p+3)$ geeft $\ln(p) = 2\ln(p+3) - 3$

Voer in $y_1 = \ln(x)$ en $y_2 = 2\ln(x+3) - 3$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}67$ en $y \approx -0{,}40$ en ook $x \approx 13{,}41$ en $y \approx 2{,}60$.

Dus $q \approx -0{,}40 \vee q \approx 2{,}60$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $\ln(x) = 2\ln(x) - 3$

$\ln(x) = 3$

$x = \mathrm{e}^3$

Dus $S(\mathrm{e}^3, 3)$.

c $CD = g(r) - f(r) = 2\ln(r) - 3 - \ln(r) = \ln(r) - 3$

$CE = f(r) = \ln(r)$

$\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{\ln(r) - 3}{\ln(r)}$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln(r)-3}{\ln(r)} = \lim_{\ln(r)\to\infty} \frac{\ln(r)-3}{\ln(r)} = \lim_{\ln(r)\to\infty} \frac{1 - \dfrac{3}{\ln(r)}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Dus deze grenswaarde is 1.

Bladzijde 95

6 **a** $f(x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$ geeft $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $2\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = 0$

$\sin(x)(2\cos(x) + \frac{1}{2}) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = -\frac{1}{4}$

$x = k \cdot \pi \vee \cos(x) = -\frac{1}{4}$

$x = k \cdot \pi$ met x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

$f(\pi) = \frac{1}{2}$, dus $T(\pi, \frac{1}{2})$ en k: $x = \pi$.

Voor symmetrie in k moet gelden $f(\pi - p) = f(\pi + p)$.

$f(\pi - p) = \sin^2(\pi - p) - \frac{1}{2}\cos(\pi - p) = (\sin(p))^2 + \frac{1}{2}\cos(p) = \sin^2(p) + \frac{1}{2}\cos(p)$

$f(\pi + p) = \sin^2(\pi + p) - \frac{1}{2}\cos(\pi + p) = (-\sin(p))^2 + \frac{1}{2}\cos(p) = \sin^2(p) + \frac{1}{2}\cos(p)$

$f(\pi - p) = f(\pi + p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in k.

b $d(T, AB) = f(x_T + \frac{1}{2}) - y_T = f(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \sin^2(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\cos(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \approx 0{,}17$

7 **a** Stel $x_B = p$, dan is $x_C = p + 2$.

$f(p) = g(p+2)$ geeft $3^p = 10 - 3^p$

$2 \cdot 3^p = 10$

$3^p = 5$

$q = f(p) = 3^p = 5$

b Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 2p$.

$f(p) = g(2p)$ geeft $3^p = 10 - 3^{2p-2}$

$$3^{2p-2} + 3^p - 10 = 0$$
$$3^{-2} \cdot 3^{2p} + 3^p - 10 = 0$$
$$\tfrac{1}{9} \cdot 3^{2p} + 3^p - 10 = 0$$
$$\tfrac{1}{9} \cdot (3^p)^2 + 3^p - 10 = 0$$

Stel $3^p = u$.

$$\tfrac{1}{9}u^2 + u - 10 = 0$$
$$u^2 + 9u - 90 = 0$$
$$(u - 6)(u + 15) = 0$$
$$u = 6 \vee u = -15$$
$$3^p = 6 \vee 3^p = -15$$

$q = f(p) = 3^p = 6$

c $g(r) = 2 \cdot f(r)$ geeft $10 - 3^{r-2} = 2 \cdot 3^r$

$$10 - 3^{-2} \cdot 3^r = 2 \cdot 3^r$$
$$10 - \tfrac{1}{9} \cdot 3^r = 2 \cdot 3^r$$
$$2\tfrac{1}{9} \cdot 3^r = 10$$
$$3^r = 4\tfrac{14}{19}$$
$$r = {}^3\log(4\tfrac{14}{19})$$

8 $\mathrm{rc}_k = \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{y_B}{x_B}$

Stel $x_A = p$. Dan is $y_A = p^2 - 5p + 6$.
Uit $OA : AB = 1 : 5$ volgt $x_B = 6x_A$.
Dit geeft $x_B = 6p$ en $y_B = 36p^2 - 30p + 6$.

$\dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{y_B}{x_B}$ geeft $\dfrac{p^2 - 5p + 6}{p} = \dfrac{36p^2 - 30p + 6}{6p}$

$$\frac{6p^2 - 30p + 36}{6p} = \frac{36p^2 - 30p + 6}{6p}$$
$$6p^2 - 30p + 36 = 36p^2 - 30p + 6$$
$$30p^2 = 30$$
$$p^2 = 1$$
$$p = 1 \vee p = -1$$

$p = 1$ geeft $\mathrm{rc}_k = \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}{1} = 2$

$p = -1$ geeft $\mathrm{rc}_k = \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{(-1)^2 - 5 \cdot -1 + 6}{-1} = -12$

Bladzijde 96

9 **a** $f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ geeft $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 3$$

$f(1) = 5\tfrac{1}{3}$ en $f(3) = 4$

Dus $A(1, 5\tfrac{1}{3})$ en $B(3, 4)$.

b $OA = \sqrt{1^2 + (5\tfrac{1}{3})^2} \approx 5{,}43$

$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

10 $p = 2\tfrac{1}{3}$ geeft $y_A = 1\tfrac{1}{3} + 2\tfrac{1}{3} = 3\tfrac{2}{3}$ en $y_B = 2\tfrac{1}{3}$

$A(1, 3\tfrac{2}{3})$ en $B(3, 2\tfrac{1}{3})$ geeft $AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2\tfrac{1}{3} - 3\tfrac{2}{3})^2} \approx 2{,}40$

© Noordhoff Uitgevers bv

11 $f_p(x) = p + \sin(x)$ geeft $f_p'(x) = \cos(x)$

$f_p'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Dus $A(\frac{1}{2}\pi, p + 1)$ en $B(1\frac{1}{2}\pi, p - 1)$.
$OA = OB$ geeft $OA^2 = OB^2$

$(\frac{1}{2}\pi)^2 + (p + 1)^2 = (1\frac{1}{2}\pi)^2 + (p - 1)^2$

$\frac{1}{4}\pi^2 + p^2 + 2p + 1 = 2\frac{1}{4}\pi^2 + p^2 - 2p + 1$

$4p = 2\pi^2$

$p = \frac{1}{2}\pi^2$

Bladzijde 97

12 $g_p(x) = \dfrac{3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 4} - p$ geeft

$$g_p'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot (6x + 10) - (3x^2 + 10x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{6x^3 + 10x^2 + 24x + 40 - 6x^3 - 20x^2 + 6x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-10x^2 + 30x + 40}{(x^2 + 4)^2}$$

$g_p'(x) = 0$ geeft $-10x^2 + 30x + 40 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 4) = 0$

$x = -1 \vee x = 4$

$g_p(-1) = -2 - p$ en $g_p(4) = 4\frac{1}{4} - p$, dus $C(-1, -2 - p)$ en $D(4, 4\frac{1}{4} - p)$.

$OC = OD$ geeft $OC^2 = OD^2$

$(-1)^2 + (-2 - p)^2 = 4^2 + (4\frac{1}{4} - p)^2$

$1 + 4 + 4p + p^2 = 16 + 18\frac{1}{16} - 8\frac{1}{2}p + p^2$

$12\frac{1}{2}p = 29\frac{1}{16}$

$p = 2\frac{13}{40}$

13 $f_p(x) = -0{,}03x^4 + 0{,}08x^3 + 0{,}48x^2 + p$ geeft $f_p'(x) = -0{,}12x^3 + 0{,}24x^2 + 0{,}96x$
$f_p'(x) = 0$ geeft $-0{,}12x^3 + 0{,}24x^2 + 0{,}96x = 0$

$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$

$x(x^2 - 2x - 8) = 0$

$x(x + 2)(x - 4) = 0$

$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$

$f_p(-2) = 0{,}8 + p$ en $f_p(4) = 5{,}12 + p$, dus $A(-2; 0{,}8 + p)$ en $B(4; 5{,}12 + p)$.
$OB = 2OA$ geeft $OB^2 = 4OA^2$

$4^2 + (5{,}12 + p)^2 = 4((-2)^2 + (0{,}8 + p)^2)$

$16 + 26{,}2144 + 10{,}24p + p^2 = 4(4 + 0{,}64 + 1{,}6p + p^2)$

$16 + 26{,}2144 + 10{,}24p + p^2 = 16 + 2{,}56 + 6{,}4p + 4p^2$

$-3p^2 + 3{,}84p + 23{,}6544 = 0$

$p^2 - 1{,}28p - 7{,}8848 = 0$

$D = (-1{,}28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -7{,}8848 = 33{,}1776$

$$p = \frac{1{,}28 + 5{,}76}{2} = 3{,}52 \vee p = \frac{1{,}28 - 5{,}76}{2} = -2{,}24$$

vold. niet

Dus $p = 3{,}52$.

14 **a** $f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sin(x)} = (\sin(x))^{-1}$ geeft $f_1{}'(x) = -(\sin(x))^{-2} \cdot \cos(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$f_1{}'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Dus $x_A = \frac{1}{2}\pi$ en $x_B = 1\frac{1}{2}\pi$.

$f_1(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{1}{1} = 1$, dus $A(\frac{1}{2}\pi, 1)$.

$f_1(1\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{1}{\sin(1\frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{1}{-1} = -1$, dus $B(1\frac{1}{2}\pi, -1)$.

$AB = \sqrt{(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi)^2 + (-1-1)^2} \approx 3{,}72$

b $f_p(x) = \dfrac{\sin(x)}{p-\cos^2(x)}$ geeft

$$f_p{}'(x) = \frac{(p-\cos^2(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -2\cos(x) \cdot -\sin(x)}{(p-\cos^2(x))^2} = \frac{p\cos(x) - \cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)}{(p-\cos^2(x))^2}$$

$$f_p{}'(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{p\cos(\frac{1}{2}\pi) - \cos^3(\frac{1}{2}\pi) - 2\sin^2(\frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi)}{(p-\cos^2(\frac{1}{2}\pi))^2} = \frac{p \cdot 0 - 0^3 - 2 \cdot 1^2 \cdot 0}{(p-0^2)^2} = \frac{0}{p^2} = 0$$

Dus de raaklijn van de grafiek van f_p is horizontaal in het punt E.

c $f_p(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{1}{p-0^2} = \dfrac{1}{p}$, dus $E\left(\frac{1}{2}\pi, \dfrac{1}{p}\right)$.

$OC = \pi$ geeft $OC^2 = \pi^2$

$OE^2 = (\frac{1}{2}\pi)^2 + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2 + \dfrac{1}{p^2}$

Uit $O(0, 0)$, $C(\pi, 0)$ en $x_E = \frac{1}{2}\pi$ volgt $OE = CE$.

$OC = OE$ geeft $OC^2 = OE^2$

$$\pi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \tfrac{3}{4}\pi^2$$

$$p^2 = \frac{4}{3\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{3\pi}\sqrt{3} \vee p = -\frac{2}{3\pi}\sqrt{3}$$

vold. niet

d $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{p} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$ geeft $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{p} \end{pmatrix} = 0$

$$\tfrac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{p^2} = 0$$

$$\tfrac{1}{4}\pi^2 = \frac{1}{p^2}$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \vee p = -\frac{2}{\pi}$$

vold. niet

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking
Uit $OE = CE$ (zie c) en $\angle(OE, CE) = 90°$ volgt $\angle COE = \angle OCE = 45°$ (gelijkbenige rechthoekige driehoek), dus $\text{rc}_{OE} = 1$. Hieruit volgt $x_E = y_E$

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{1}{p}$$
$$p = \frac{2}{\pi}$$

15.2 Optimaliseringsproblemen

Bladzijde 99

15 **a** $L = y_A - y_B = f(p) - g(p) = \sqrt{2p} - \tfrac{1}{2}p$

b Voer in $y_1 = \sqrt{2x} - \tfrac{1}{2}x$.
De optie maximum geeft $x = 2$.
Voor $p = 2$ is de lengte van lijnstuk AB maximaal.

Bladzijde 100

16 **a** $L = 2\cos^2(p) - \sin(2p) + 1 = \cos(2p) + 1 - \sin(2p) + 1 = 2 + \cos(2p) - \sin(2p)$
$p = \tfrac{7}{8}\pi$ geeft $L = 2 + \cos(1\tfrac{3}{4}\pi) - \sin(1\tfrac{3}{4}\pi) = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$
Het maximum van L is $2 + \sqrt{2}$.

b Manier 1:
$\sin(2p) = -\cos(2p)$
$\sin(2p) = \cos(2p + \pi)$
$\sin(2p) = \sin(2p + 1\tfrac{1}{2}\pi)$
enzovoort

Manier 2:
$\sin(2p) = -\cos(2p)$
$\sin(2p) = \cos(2p + \pi)$
$\cos(2p - \tfrac{1}{2}\pi) = \cos(2p + \pi)$
enzovoort

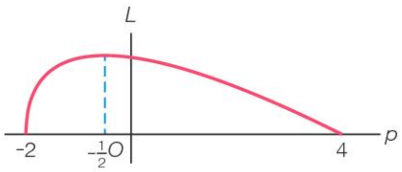
Bladzijde 101

17 **a** $L = f(p) - g(p) = \sqrt{6p + 12} - (p + 2) = \sqrt{6p + 12} - p - 2$

b $$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{6p + 12}} \cdot 6 - 1 = \frac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1$$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1 = 0$

$$\frac{3}{\sqrt{6p + 12}} = 1$$
$$\sqrt{6p + 12} = 3$$
$$6p + 12 = 9$$
$$6p = -3$$
$$p = -\tfrac{1}{2}$$



De maximale waarde van L is $\sqrt{6 \cdot -\tfrac{1}{2} + 12} - -\tfrac{1}{2} - 2 = 1\tfrac{1}{2}$.

18 $L = AB = f(p) - g(p) = \frac{1}{2}\sin(2p) - (\cos(p) - 1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sin(2p) - \cos(p) + 1\frac{1}{2}$

$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} \cdot \cos(2p) \cdot 2 + \sin(p) = \cos(2p) + \sin(p)$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\cos(2p) + \sin(p) = 0$

$\cos(2p) = -\sin(p)$

$\cos(2p) = \sin(p + \pi)$

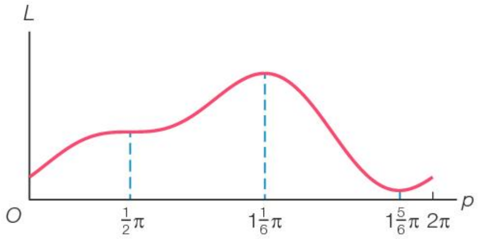
$\cos(2p) = \cos(p + \frac{1}{2}\pi)$

$2p = p + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2p = -p - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3p = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

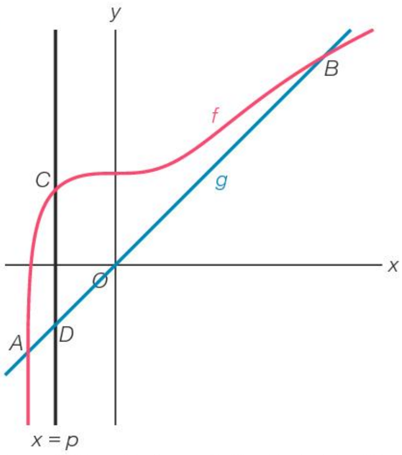
$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee p = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

p in $[0, 2\pi]$ geeft $p = \frac{1}{2}\pi \vee p = 1\frac{1}{6}\pi \vee p = 1\frac{5}{6}\pi$



De maximale lengte van AB is
$\frac{1}{2}\sin(2 \cdot 1\frac{1}{6}\pi) - \cos(1\frac{1}{6}\pi) + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin(2\frac{1}{3}\pi) - \cos(1\frac{1}{6}\pi) + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3} + 1\frac{1}{2}$.

19

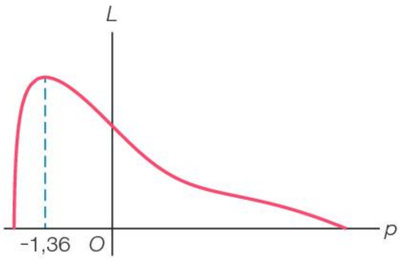


$L = CD = f(p) - g(p) = \ln(p^3 + 8) - p$

$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{p^3 + 8} \cdot 3p^2 - 1 = \frac{3p^2}{p^3 + 8} - 1$

Voer in $y_1 = \frac{3x^2}{x^3 + 8} - 1$.

De optie nulpunt geeft $x \approx -1{,}36$.



Dus de lengte van lijnstuk CD is maximaal voor $p \approx -1{,}36$.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 **a** Voor f geldt $y = e^{\frac{1}{2}x}$, dus voor f^{inv} geldt $x = e^{\frac{1}{2}y}$.

$x = e^{\frac{1}{2}y}$ geeft $e^{\frac{1}{2}y} = x$

$\frac{1}{2}y = \ln(x)$

$y = 2\ln(x)$

b $y = 2\ln(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 2\ln(\frac{1}{3}x)$, dus $g(x) = 2\ln(\frac{1}{3}x)$.

$L = AB = f(p) - g(p) = e^{\frac{1}{2}p} - 2\ln(\frac{1}{3}p)$

Voer in $y_1 = e^{\frac{1}{2}x} - 2\ln(\frac{1}{3}x)$.

De optie minimum geeft $x \approx 1{,}71$ en $y \approx 3{,}48$.

Dus de minimale lengte van het lijnstuk AB is ongeveer 3,48.

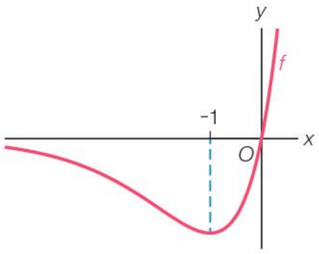
Bladzijde 102

21 **a** $f(x) = 5x\,e^x$ geeft $f'(x) = 5 \cdot e^x + 5x \cdot e^x = (5x + 5)\,e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $5x + 5 = 0$

$5x = -5$

$x = -1$



min. is $f(-1) = 5 \cdot -1 \cdot e^{-1} = \dfrac{-5}{e}$

Dus $B_f = \left[-\dfrac{5}{e}, \rightarrow\right\rangle$.

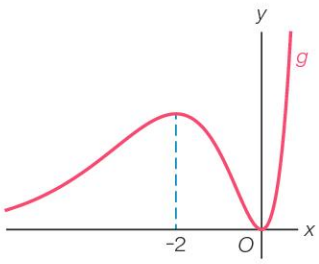
b $g(x) = 5x^2\,e^x$ geeft $g'(x) = 10x \cdot e^x + 5x^2 \cdot e^x = (5x^2 + 10x)\,e^x$

$g'(x) = 0$ geeft $(5x^2 + 10x)\,e^x = 0$

$5x^2 + 10x = 0$

$5x(x + 2) = 0$

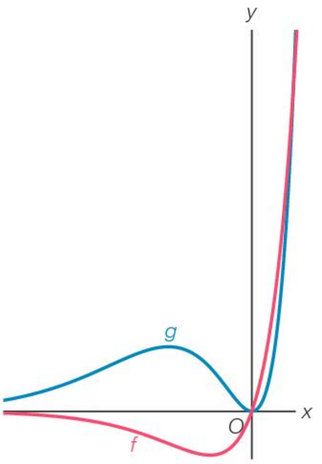
$x = 0 \vee x = -2$



max. is $g(-2) = 5 \cdot (-2)^2 \cdot e^{-2} = \dfrac{20}{e^2}$

min. is $g(0) = 5 \cdot 0^2 \cdot e^0 = 0$

c



$L = AB = g(p) - f(p) = 5p^2\,e^p - 5p\,e^p = (5p^2 - 5p)\,e^p$

$\frac{dL}{dp} = (10p - 5) \cdot e^p + (5p^2 - 5p) \cdot e^p = (5p^2 + 5p - 5)\,e^p$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $(5p^2 + 5p - 5)\,e^p = 0$

$5p^2 + 5p - 5 = 0$

$p^2 + p - 1 = 0$

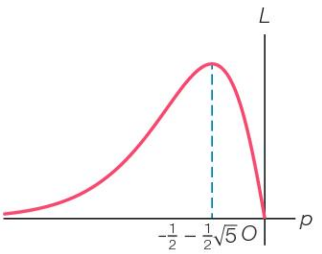
$(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$

$(p + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

$p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee p + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

vold. niet



Dus de lengte van het lijnstuk AB is maximaal voor $p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

d $L = CD = f(q) - g(q) = 5q\,e^q - 5q^2\,e^q$

Voer in $y_1 = 5x\,e^x - 5x^2\,e^x$.

De optie maximum geeft $x \approx 0{,}618$ en $y \approx 2{,}190$.

De maximale lengte van het lijnstuk CD is ongeveer 2,190.

22 **a** De kettingboog door (0, 10) geeft $\frac{1}{2}a(e^0 + e^0) + b = 10$

$\frac{1}{2}a(1 + 1) + b = 10$

$a + b = 10$

$b = 10 - a$

De kettingboog door (10, 0) geeft $\frac{1}{2}a(e^{\frac{10}{a}} + e^{-\frac{10}{a}}) + b = 0$

$b = -\frac{1}{2}a(e^{\frac{10}{a}} + e^{-\frac{10}{a}})$

Voer in $y_1 = 10 - x$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x(e^{\frac{10}{x}} + e^{-\frac{10}{x}})$.

De optie snijpunt geeft $x = -6{,}1875...$ en $y = 16{,}1875...$

Dus $a \approx -6{,}188$ en $b \approx 16{,}188$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left.\begin{array}{l} y_p = mx^2 + n \\ \text{door } (0, 10) \end{array}\right\} n = 10$

$\left.\begin{array}{l} y_p = mx^2 + 10 \\ \text{door } (10, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \cdot 10^2 + 10 = 0 \\ 100m = -10 \\ m = -0{,}1 \end{array}$

Dus $y_p = -0{,}1x^2 + 10$.
Het verschil tussen y_k en y_p is
$|y_k - y_p| = |-3{,}0937... \cdot (\mathrm{e}^{\frac{x}{-6{,}1875...}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{-6{,}1875...}}) + 16{,}1875... - (-0{,}1x^2 + 10)|$.
Voer in $y_1 = |-3{,}0937... \cdot (\mathrm{e}^{\frac{x}{-6{,}1875...}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{-6{,}1875...}}) + 16{,}1875... - (-0{,}1x^2 + 10)|$.
De optie maximum geeft $x = 7{,}1448...$ en $y = 0{,}5005...$
Dus het maximale verschil tussen y_k en y_p is ongeveer 50 cm.

23 **a** $y_Q = f(2) = \sqrt{5 - 4} = 1$
$OQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

b $y_Q = f(p) = \sqrt{5 - 2p}$
$L = OQ = \sqrt{x_Q^{\ 2} + y_Q^{\ 2}} = \sqrt{q^2 + (\sqrt{5 - 2q})^2} = \sqrt{q^2 - 2q + 5}$

c Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.
De optie minimum geeft $x = 1$ en $y = 2$.
De minimale lengte van het lijnstuk OQ is 2.

Bladzijde 103

24 **a** $A = p\sqrt{5 - 2p}$ geeft

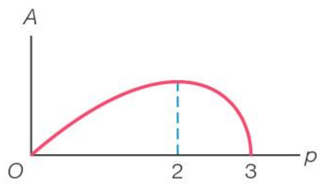
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 1 \cdot \sqrt{5 - 2p} + p \cdot \frac{1}{2\sqrt{5 - 2p}} \cdot -2 = \sqrt{5 - 2p} - \frac{p}{\sqrt{5 - 2p}} = \frac{5 - 2p}{\sqrt{5 - 2p}} - \frac{p}{\sqrt{5 - 2p}} = \frac{5 - 3p}{\sqrt{5 - 2p}}$$

b $\frac{5}{3}\sqrt{5 - 2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{5 - \frac{10}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{5}{9}\sqrt{15}$

25 **a** $OQ = x_P = p$ en $PQ = y_P = f(p) = \sqrt{3 - p}$
$A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \sqrt{3 - p} = \frac{1}{2}p\sqrt{3 - p}$

b $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - p} + \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - p}} \cdot -1 = \frac{\sqrt{3 - p}}{2} - \frac{p}{4\sqrt{3 - p}} = \frac{2(3 - p) - p}{4\sqrt{3 - p}} = \frac{6 - 3p}{4\sqrt{3 - p}}$$

c $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $6 - 3p = 0$
$-3p = -6$
$p = 2$



De maximale oppervlakte van driehoek OPQ is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3 - 2} = 1$.

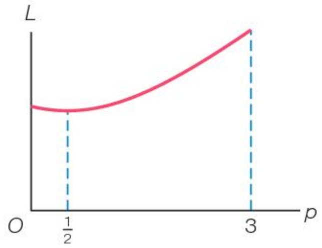
d $OQ = x_P = p$ en $PQ = y_P = f(p) = \sqrt{3 - p}$
In $\triangle OPQ$ is $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$
$OP^2 = p^2 + (\sqrt{3 - p})^2$
$OP^2 = p^2 + 3 - p$
$OP^2 = p^2 - p + 3$
$L = OP = \sqrt{p^2 - p + 3}$

e $L = \sqrt{p^2 - p + 3}$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = \dfrac{1}{2\sqrt{p^2 - p + 3}} \cdot (2p - 1) = \dfrac{2p - 1}{2\sqrt{p^2 - p + 3}}$

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $2p - 1 = 0$

$2p = 1$

$p = \frac{1}{2}$



De minimale lengte van OP is $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 3} = \sqrt{2\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

Bladzijde 104

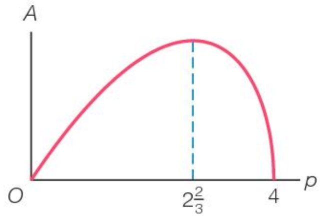
26 **a** $A = O(\triangle OSP) = \frac{1}{2} \cdot OS \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot p\sqrt{8 - 2p} = 2p\sqrt{8 - 2p}$

$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 2 \cdot \sqrt{8 - 2p} + 2p \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{8 - 2p}} \cdot -2 = 2\sqrt{8 - 2p} - \dfrac{2p}{\sqrt{8 - 2p}} = \dfrac{2(8 - 2p) - 2p}{\sqrt{8 - 2p}} = \dfrac{16 - 6p}{\sqrt{8 - 2p}}$

$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $16 - 6p = 0$

$-6p = -16$

$p = 2\frac{2}{3}$



De maximale oppervlakte van driehoek OSP is

$2 \cdot 2\frac{2}{3}\sqrt{8 - 2 \cdot 2\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3}\sqrt{2\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = 3\frac{5}{9}\sqrt{6}.$

Opmerking

Je krijgt de maximale oppervlakte als P de top is. Je kunt dus ook eerst y_{top} berekenen.

b $QS = x_S - x_Q = 4 - p$ en $PQ = y_P = f(p) = p\sqrt{8 - 2p}$

$O = O(\triangle QSP) = \frac{1}{2} \cdot QS \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot (4 - p) \cdot p\sqrt{8 - 2p} = (2p - \frac{1}{2}p^2)\sqrt{8 - 2p}$

c $\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}p} = (2 - p) \cdot \sqrt{8 - 2p} + (2p - \frac{1}{2}p^2) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{8 - 2p}} \cdot -2 = (2 - p)\sqrt{8 - 2p} - \dfrac{2p - \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8 - 2p}}$

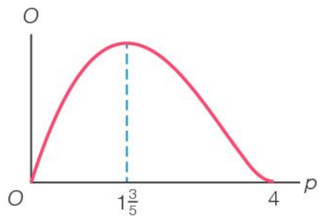
$= \dfrac{(2 - p)(8 - 2p)}{\sqrt{8 - 2p}} - \dfrac{2p - \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8 - 2p}} = \dfrac{16 - 4p - 8p + 2p^2 - 2p + \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8 - 2p}} = \dfrac{2\frac{1}{2}p^2 - 14p + 16}{\sqrt{8 - 2p}}$

$= \dfrac{5p^2 - 28p + 32}{2\sqrt{8 - 2p}}$

$\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $5p^2 - 28p + 32 = 0$

$D = (-28)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 32 = 144$

$p = \dfrac{28 + 12}{10} = 4 \vee p = \dfrac{28 - 12}{10} = 1\frac{3}{5}$



De maximale oppervlakte van driehoek QSP is $(2 \cdot 1\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot (1\frac{3}{5})^2)\sqrt{8 - 2 \cdot 1\frac{3}{5}} \approx 4{,}21$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

27 Stel $x_P = p$.
Dan is $y_P = p\sqrt{p}$.

$A(4, 0)$ en $P(p, p\sqrt{p})$ geeft $AP = \sqrt{(p-4)^2 + (p\sqrt{p} - 0)^2} = \sqrt{p^2 - 8p + 16 + p^3}$

Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^3}$.
De optie minimum geeft $x \approx 1{,}33$ en $y \approx 3{,}08$.
Dus deze minimale lengte is ongeveer 3,08.

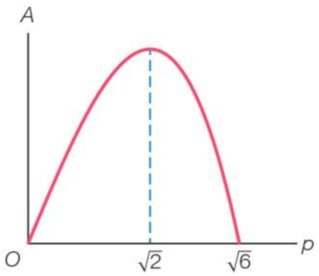
28 **a** Stel $x_P = p$.

$PQ = x_P - x_Q = p - {-p} = 2p$ en $y_P = 3 - \frac{1}{2}p^2$

$A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot (3 - \frac{1}{2}p^2) = 3p - \frac{1}{2}p^3$

$$\frac{dA}{dp} = 3 - 1\tfrac{1}{2}p^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 3 - 1\tfrac{1}{2}p^2 &= 0 \\ -1\tfrac{1}{2}p^2 &= -3 \\ p^2 &= 2 \\ p = \sqrt{2} \vee p &= -\sqrt{2} \\ &\quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$



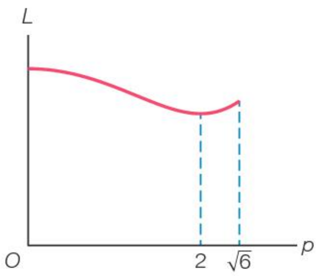
Dus de maximale oppervlakte van driehoek OPQ is $3\sqrt{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^3 = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

b $OP^2 = x_P{}^2 + y_P{}^2 = p^2 + (3 - \frac{1}{2}p^2)^2 = p^2 + 9 - 3p^2 + \frac{1}{4}p^4 = \frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9$

Stel de lengte van OP is L.

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9} \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9}} \cdot (p^3 - 4p) = \frac{p^3 - 4p}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9}}$$

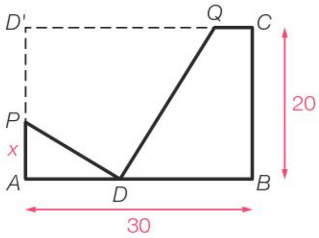
$$\begin{aligned} \frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } p^3 - 4p &= 0 \\ p(p^2 - 4) &= 0 \\ p = 0 \vee p^2 &= 4 \\ p = 0 \vee p = 2 \vee p &= -2 \\ &\quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$



De minimale lengte van het lijnstuk OP is $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 9} = \sqrt{5}$.

Bladzijde 105

29 Stel $AP = x$.



$$\left.\begin{array}{l} AP + PD' = 20 \\ AP = x \\ PD' = PD \end{array}\right\} x + PD = 20, \text{ dus } PD = 20 - x$$

In $\triangle ADP$ is $AP^2 + AD^2 = PD^2$

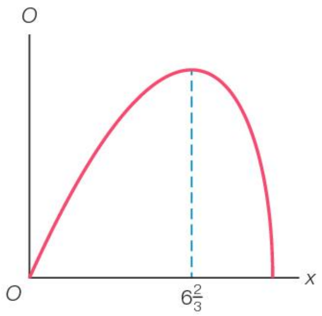
$$\begin{aligned} x^2 + AD^2 &= (20 - x)^2 \\ x^2 + AD^2 &= 400 - 40x + x^2 \\ AD^2 &= 400 - 40x \\ AD &= \sqrt{400 - 40x} \end{aligned}$$

$$O = O(\triangle ADP) = \tfrac{1}{2} \cdot AD \cdot AP = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{400 - 40x} \cdot x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{400 - 40x}$$

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{400 - 40x} + \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{400 - 40x}} \cdot {-40} = \frac{\tfrac{1}{2}(400 - 40x)}{\sqrt{400 - 40x}} - \frac{10x}{\sqrt{400 - 40x}} = \frac{200 - 20x - 10x}{\sqrt{400 - 40x}} = \frac{200 - 30x}{\sqrt{400 - 40x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ geeft } 200 - 30x = 0$$

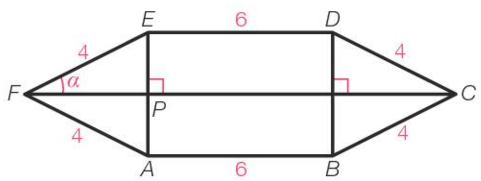
$$\begin{aligned} -30x &= -200 \\ x &= 6\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$



Dus O is maximaal voor $x = 6\frac{2}{3}$.

De maximale oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \sqrt{400 - 40 \cdot 6\frac{2}{3}} \approx 38{,}49\ \text{cm}^2$.

30 **a**



In $\triangle FPE$ is $\sin(\alpha) = \dfrac{EP}{4}$, dus $EP = 4\sin(\alpha)$.

$AE = 2EP = 8\sin(\alpha)$

b In $\triangle FPE$ is $\cos(\alpha) = \dfrac{FP}{4}$, dus $FP = 4\cos(\alpha)$.

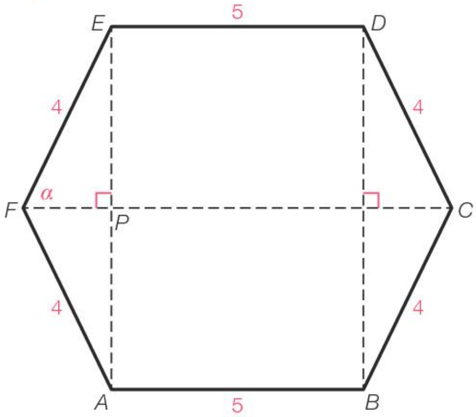
$O(\triangle AEF) = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4\cos(\alpha) \cdot 8\sin(\alpha) = 16\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

c $O(ABDE) = AB \cdot AE = 6 \cdot 8\sin(\alpha) = 48\sin(\alpha)$

d $O(ABCDEF) = 2 \cdot O(\triangle AEF) + O(ABDE) = 32\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 48\sin(\alpha) = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a**



$\cos(\alpha) = \dfrac{FP}{4}$ geeft $FP = 4\cos(\alpha)$

$\sin(\alpha) = \dfrac{EP}{4}$ geeft $EP = 4\sin(\alpha)$

$AE = 2EP = 8\sin(\alpha)$

$A = O(ABCDEF) = 2 \cdot O(\triangle AEF) + O(ABDE) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sin(\alpha) \cdot 4\cos(\alpha) + 5 \cdot 8\sin(\alpha)$

$= 32\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 40\sin(\alpha) = 16\sin(2\alpha) + 40\sin(\alpha)$

b $\dfrac{dA}{d\alpha} = 16 \cdot \cos(2\alpha) \cdot 2 + 40\cos(\alpha) = 32\cos(2\alpha) + 40\cos(\alpha)$

$\dfrac{dA}{d\alpha} = 0$ geeft $32\cos(2\alpha) + 40\cos(\alpha) = 0$

$32(2\cos^2(\alpha) - 1) + 40\cos(\alpha) = 0$

$64\cos^2(\alpha) - 32 + 40\cos(\alpha) = 0$

$8\cos^2(\alpha) + 5\cos(\alpha) - 4 = 0$

Stel $\cos(\alpha) = u$.

$8u^2 + 5u - 4 = 0$

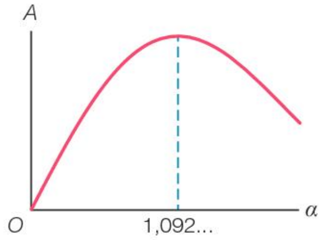
$D = 5^2 - 4 \cdot 8 \cdot -4 = 153$

$u = \dfrac{-5 + \sqrt{153}}{16} = 0{,}460... \vee u = \dfrac{-5 - \sqrt{153}}{16} = -1{,}085...$

$\cos(\alpha) = 0{,}460... \vee \cos(\alpha) = -1{,}085...$

$\alpha = 1{,}092... + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -1{,}092... + k \cdot 2\pi$

α in $[0, \frac{1}{2}\pi]$ geeft $\alpha = 1{,}092...$

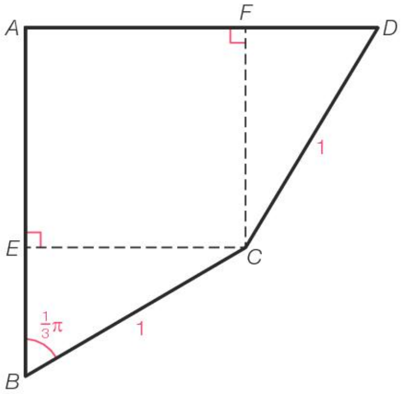


De oppervlakte is maximaal bij $\alpha = 1{,}092... \cdot \dfrac{180°}{\pi} \approx 63°$.

Bladzijde 107

32 **a** Bij $\angle B = \frac{1}{2}\pi$ is $O(ABCD) = 1^2 = 1$.

Zie voor $\angle B = \frac{1}{3}\pi$ de figuur.



In $\triangle BCE$ is $CE = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $DE = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$.

$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle BCE) + O(AECF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 \approx 1{,}18$

b $CE = \sin(x)$ en $DE = \cos(x)$

$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle BCE) + O(AECF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x)$

c $A = O(ABCD) = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$ geeft

$\frac{dA}{dx} = 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \sin(2x) + \cos(2x)$

$\frac{dA}{dx} = 0$ geeft $\sin(2x) + \cos(2x) = 0$

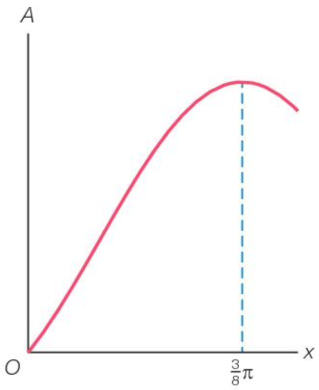
$\sin(2x) = -\cos(2x)$

$\tan(2x) = -1$

$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi$



Dus de oppervlakte van de vierhoek is maximaal voor $x = \frac{3}{8}\pi$.

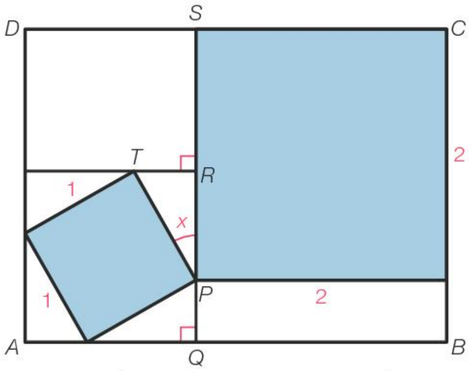
$A = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$

De maximale oppervlakte is

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{3}{4}\pi) + \frac{1}{2}\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ m^2.

© Noordhoff Uitgevers bv

33 **a**



In $\triangle PRT$ is $PR = \cos(x)$ en $RT = \sin(x)$.
$QP = RT = \sin(x)$, dus $QS = \sin(x) + 2$ en $O(BCSQ) = BQ \cdot QS = 2 \cdot (\sin(x) + 2) = 2\sin(x) + 4$.
$AQ = QR = \sin(x) + \cos(x)$ geeft
$O(AQSD) = AQ \cdot QS = (\sin(x) + \cos(x))(\sin(x) + 2) = \sin^2(x) + 2\sin(x) + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$
$O = O(BCSQ) + O(AQSD) = 2\sin(x) + 4 + \sin^2(x) + 2\sin(x) + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$
$= \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + 4\sin(x) + 2\cos(x) + 4$

b Voer in $y_1 = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + 4\sin(x) + 2\cos(x) + 4$ en stel de GR in op graden.
De optie maximum geeft $x \approx 65$.
Dus de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is maximaal voor $x \approx 65°$.

Bladzijde 108

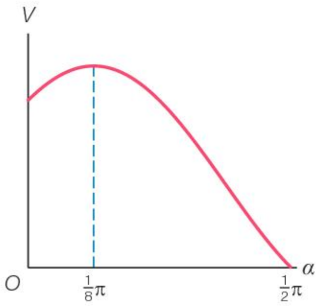
34 **a** $AB = 1$, dus in $\triangle ABP$ is $AP = \cos(\alpha)$ en $BP = \sin(\alpha)$.
$\angle OAC = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ (gestrekte hoek) geeft
$\angle OCA = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ (hoekensom driehoek)
$AC = 1$, dus in $\triangle OAC$ is $OC = \cos(\alpha)$ en $OA = \sin(\alpha)$.
$O(OPQC) = OP \cdot OC = (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$

b $V = O(OPQC) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$ geeft

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1}{2}\cos(2\alpha) \cdot 2 + 2\cos(\alpha) \cdot -\sin(\alpha) = \cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \text{ geeft } \cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0$$
$$-\sin(2\alpha) = -\cos(2\alpha)$$
$$\tan(2\alpha) = 1$$
$$2\alpha = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$\alpha = \tfrac{1}{8}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

$0 \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$ geeft $\alpha = \frac{1}{8}\pi$



Dus de oppervlakte van rechthoek $OPQC$ is maximaal voor $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

35 **a** $MN = 7 + 5 = 12$

In $\triangle MNP$ is $\cos(x) = \dfrac{MP}{12}$, dus $MP = 12\cos(x)$ en $\sin(x) = \dfrac{NP}{12}$, dus $NP = 12\sin(x)$.

$AP = AM + MP = 7 + 12\cos(x)$
$BP = BN + NP = 5 + 12\sin(x)$
$AB^2 = AP^2 + BP^2 = (7 + 12\cos(x))^2 + (5 + 12\sin(x))^2$
$= 49 + 168\cos(x) + 144\cos^2(x) + 25 + 120\sin(x) + 144\sin^2(x)$
$= 120\sin(x) + 168\cos(x) + 144(\sin^2(x) + \cos^2(x)) + 49 + 25$
$= 120\sin(x) + 168\cos(x) + 144 + 49 + 25$
$= 120\sin(x) + 168\cos(x) + 218$
$L = AB = \sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}$

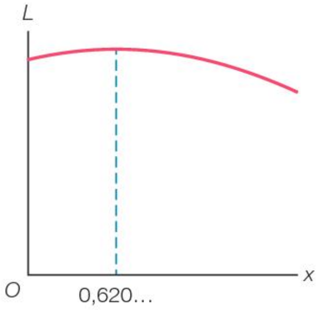
© Noordhoff Uitgevers bv

b $L = 20$ geeft $\sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218} = 20$ oftewel $120\sin(x) + 168\cos(x) + 218 = 400$
Voer in $y_1 = 120\sin(x) + 168\cos(x) + 218$ en $y_2 = 400$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}128...$ en $x = 1{,}111...$
Dus $\angle PMN = 0{,}128... \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 7°$ of $\angle PMN = 1{,}111... \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 64°$.

c $L = \sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}} \cdot (120\cos(x) - 168\sin(x)) = \frac{60\cos(x) - 84\sin(x)}{\sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}}$$

Voer in $y_1 = \frac{60\cos(x) - 84\sin(x)}{\sqrt{120\sin(x) + 168\cos(x) + 218}}$.
De optie nulpunt geeft $x = 0{,}620...$

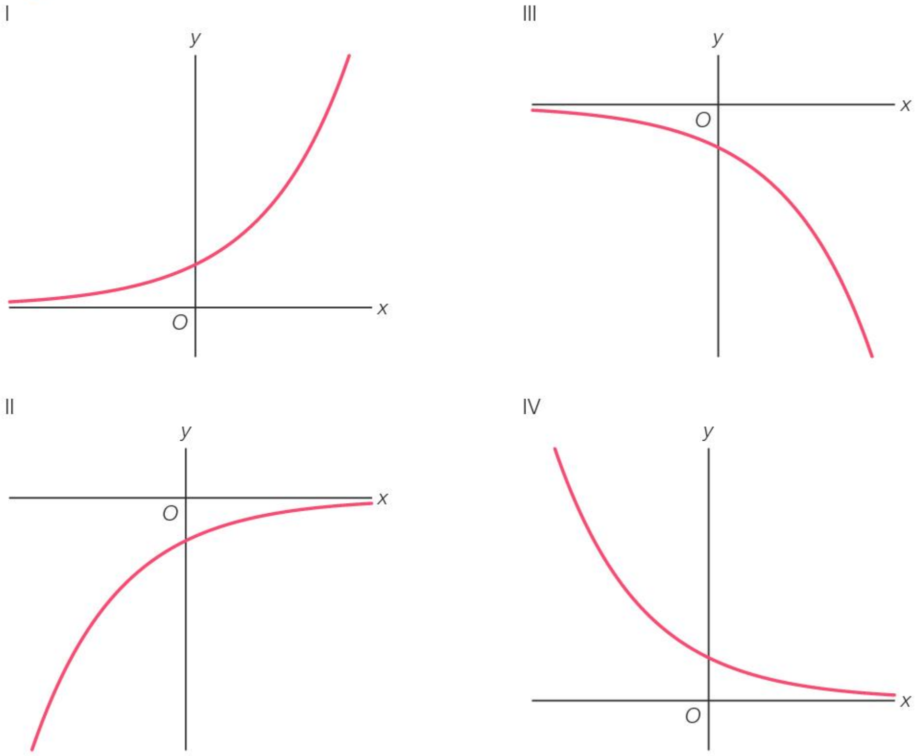


$x = 0{,}620...$ geeft $L = \sqrt{120\sin(0{,}620...) + 168\cos(0{,}620...) + 218} = 20{,}60...$
De maximale afstand tussen A en B is ongeveer 206 cm.

15.3 Hellingen en buigpunten

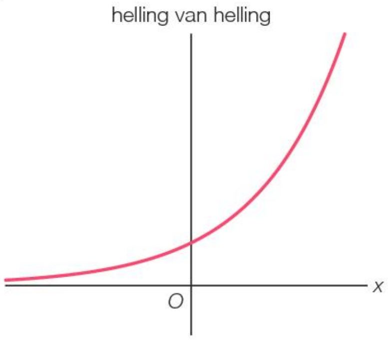
Bladzijde 110

36 **a**

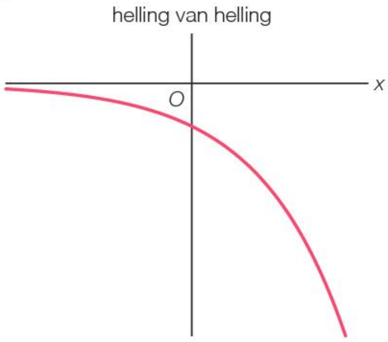


© Noordhoff Uitgevers bv

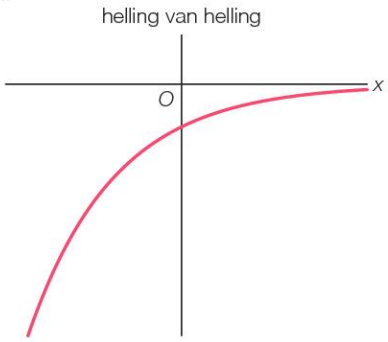
b I



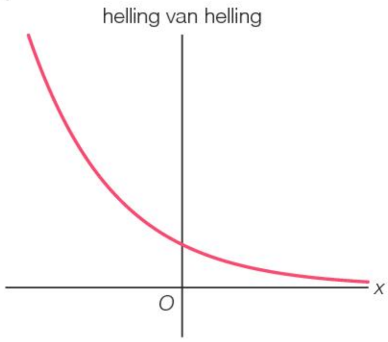
III



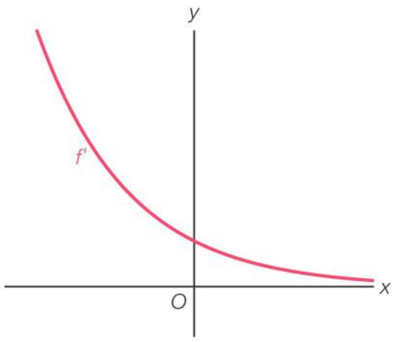
II

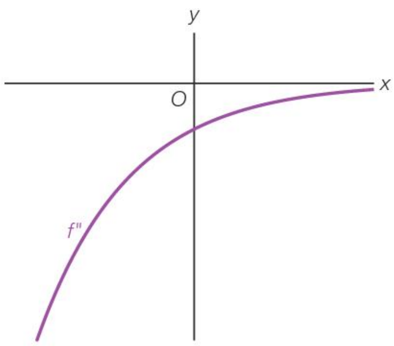


IV

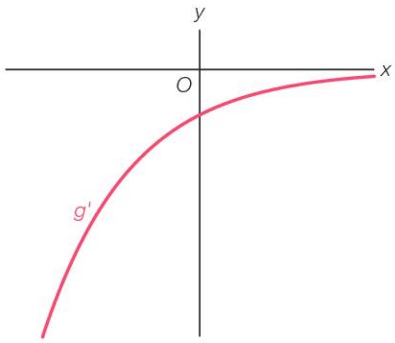


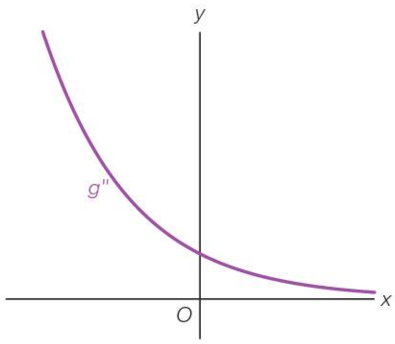
37 **a**





b





38 $f(x) = x + \frac{1}{2}e^x$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x > 0$ voor elke x, dus f is stijgend.
$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x$ geeft $f''(x) = \frac{1}{2}e^x > 0$ voor elke x, dus f' is stijgend oftewel f is toenemend stijgend.

Bladzijde 112

39 $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-1\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

Omdat voor elke $x > 0$ geldt $x^{-\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-1\frac{1}{2}} > 0$, is $f'(x) > 0$ en $f''(x) < 0$.
Dus f is een afnemend stijgende functie.

40 $T = 20 + 80\,e^{-0{,}2t}$ geeft $\frac{dT}{dt} = 80\,e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2 = -16\,e^{-0{,}2t}$

$\frac{dT}{dt} = -16\,e^{-0{,}2t}$ geeft $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) = -16\,e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2 = 3{,}2\,e^{-0{,}2t}$

Omdat voor elke t geldt $e^{-0{,}2t} > 0$, is $\frac{dT}{dt} < 0$ en $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) > 0$.

Dus T is een afnemend dalende functie van t.
Het afkoelingsproces verloopt dus steeds langzamer.

41 $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5) = x^4 - 8x^2 + 15$
$f'(x) = 4x^3 - 16x$
$f''(x) = 12x^2 - 16$
$f'(1) = 4 - 16 = -12 < 0$
$f''(1) = 12 - 16 = -4 < 0$
Dus toenemende daling.

42 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2} \text{ en}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-4x - 2) - (-2x^2 - 2x + 2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)(-4x-2) - 4x(-2x^2 - 2x + 2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3 - 2x^2 - 4x - 2 + 8x^3 + 8x^2 - 8x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{4x^3 + 6x^2 - 12x - 2}{(x^2+1)^3}$$

$f'(-3) = \frac{-18+6+2}{10^2} < 0$ en $f''(-3) = \frac{-108+54+36-2}{10^3} < 0$, dus in A toenemend dalend.

$f'(0) = \frac{0+0+2}{1^2} > 0$ en $f''(0) = \frac{0+0+0-2}{1^3} < 0$, dus in B afnemend stijgend.

$f'(1) = \frac{-2-2+2}{2^2} < 0$ en $f''(1) = \frac{4+6-12-2}{2^3} < 0$, dus in C toenemend dalend.

Bladzijde 113

43 **a** $100\,e^{-0{,}01t^2} = 50$
$e^{-0{,}01t^2} = \frac{1}{2}$
$-0{,}01t^2 = \ln(\frac{1}{2})$
$-0{,}01t^2 = -\ln(2)$
$t^2 = 100\ln(2)$
$t = \sqrt{100\ln(2)} = 8{,}325...$
Na $8{,}325... \cdot 60 \approx 500$ seconden is de helft weggestroomd.

b $\frac{dV}{dt} = 100\,e^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t = -2t\,e^{-0{,}01t^2}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) = -2 \cdot e^{-0{,}01t^2} - 2t \cdot e^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t = -2\,e^{-0{,}01t^2} + 0{,}04t^2\,e^{-0{,}01t^2} = (0{,}04t^2 - 2)\,e^{-0{,}01t^2}$

$t = 7$ geeft $\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) \approx -0{,}02 < 0$

Op $t = 7$ is V, de resterende hoeveelheid water, toenemend dalend.
Dus is $100 - V$, de hoeveelheid water die uitstroomt, toenemend stijgend.
De uitstroomsnelheid neemt dus toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

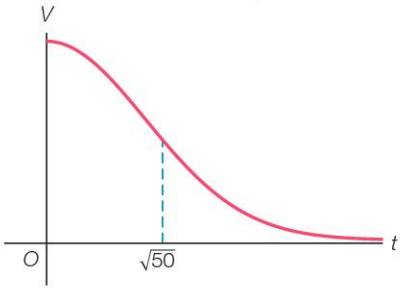
Alternatieve uitwerking
Noem de hoeveelheid water die het vat uitstroomt H.
Op $t = 0$ is $V = 100$, dus $H = 100 - V = 100 - 100\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -100\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t \;=\; 2t\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01t^2} + 2t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01t^2} \cdot -0{,}02t = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2} - 0{,}04t^2\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2} = (2 - 0{,}04t^2)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2}$$

$t = 7$ geeft $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right) \approx 0{,}02 > 0$
Op $t = 7$ is de uitstroom dus toenemend stijgend.
De uitstroomsnelheid neemt dus toe.

c $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right) = 0$ geeft $(0{,}04t^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2} = 0$
$0{,}04t^2 - 2 = 0$
$0{,}04t^2 = 2$
$t^2 = 50$
$t = \sqrt{50}$

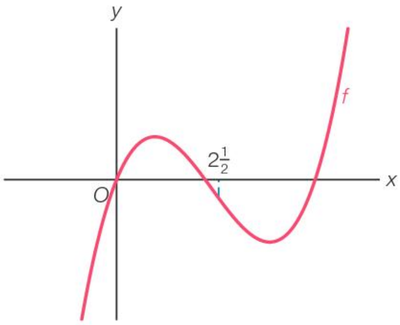


De uitstroomsnelheid is maximaal na $\sqrt{50} \cdot 60 \approx 424$ seconden.

d $\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right]_{t=\sqrt{50}} = 8{,}577...$

De maximale uitstroomsnelheid is dus 8,577... L/minuut.
De helft van de maximale snelheid is 4,288... L/minuut.
Voer in $y_1 = -2x\,\mathrm{e}^{-0{,}01x^2}$ en $y_2 = -4{,}288...$
Voor $x > \sqrt{50}$ geeft de optie snijpunt $x = 13{,}587...$
$(13{,}587... - \sqrt{50}) \cdot 60 \approx 391$ seconden na het in c berekende tijdstip is de uitstroomsnelheid afgenomen tot de helft van de maximale snelheid.

44 $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$
$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$
$f''(x) = 12x - 30$
$f''(2\frac{1}{2}) = 0$ en $f'(2\frac{1}{2}) = -13\frac{1}{2} < 0$



Dus de grafiek van f gaat bij $x = 2\frac{1}{2}$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

45 De schets is nodig om te laten zien dat de grafiek overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend, en niet bijvoorbeeld overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

46 **a** $f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$

$f'(x) = 4ax^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$

$f''(x) = 12ax^2 - x - 6$

$f''(3) = 0$ geeft $12a \cdot 3^2 - 3 - 6 = 0$

$108a = 9$

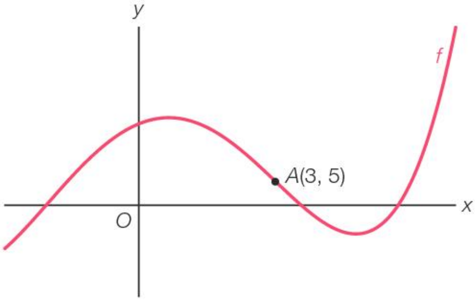
$a = \frac{1}{12}$

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$

$f(3) = 5$ geeft $\frac{1}{12} \cdot 3^4 - \frac{1}{6} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = 5$

$6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} - 27 + 12 + b = 5$

$b = 17\frac{3}{4}$



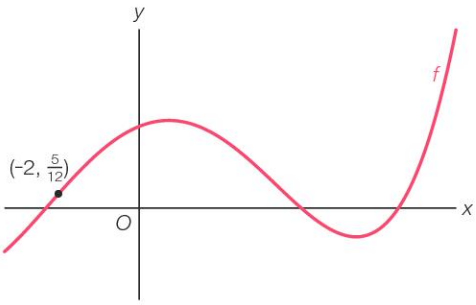
De grafiek van f gaat voor $a = \frac{1}{12}$ en $b = 17\frac{3}{4}$ in $A(3, 5)$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

b $a = \frac{1}{12}$ geeft $f''(x) = x^2 - x - 6$

$f''(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$



$f(-2) = \frac{5}{12}$, dus in het punt $(-2, \frac{5}{12})$ gaat de grafiek van f over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

47 $f_p(x) = \dfrac{10}{x^2 + p}$

$$f_p'(x) = \frac{(x^2 + p) \cdot 0 - 10 \cdot 2x}{(x^2 + p)^2} = \frac{-20x}{(x^2 + p)^2}$$

$$f_p''(x) = \frac{(x^2 + p)^2 \cdot -20 - -20x \cdot 2(x^2 + p) \cdot 2x}{(x^2 + p)^4} = \frac{(x^2 + p) \cdot -20 + 20x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + p)^3}$$

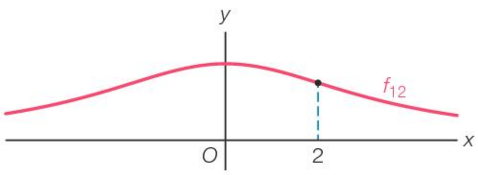
$$= \frac{-20x^2 - 20p + 80x^2}{(x^2 + p)^3} = \frac{60x^2 - 20p}{(x^2 + p)^3}$$

$f_p''(2) = 0$ geeft $\dfrac{60 \cdot 4 - 20p}{(4 + p)^3} = 0$

$240 - 20p = 0$

$-20p = -240$

$p = 12$



Dus voor $p = 12$ gaat de grafiek van f_p bij $x = 2$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

© Noordhoff Uitgevers bv

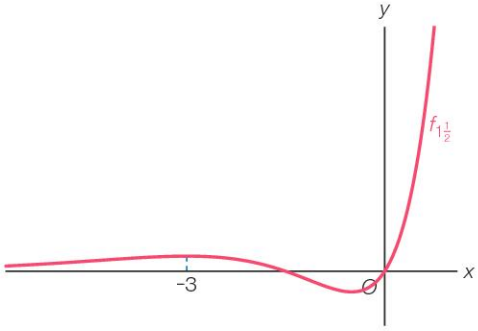
48 **a** $f_a(x) = (x^2 + ax)\,e^x$ geeft $f_a'(x) = (2x + a) \cdot e^x + (x^2 + ax) \cdot e^x = (x^2 + (a + 2)x + a)\,e^x$

$f_a'(-3) = 0$ geeft $(9 - 3(a + 2) + a)e^{-3} = 0$

$9 - 3a - 6 + a = 0$

$-2a = -3$

$a = 1\frac{1}{2}$



Dus voor $a = 1\frac{1}{2}$ heeft f_a een maximum voor $x = -3$.

$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = (x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2})\,e^x$

$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0$ geeft $(x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2})\,e^x = 0$

$x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$(x + 3)(x + \frac{1}{2}) = 0$

$x = -3 \vee x = -\frac{1}{2}$

min. is $f_{1\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) = ((-\frac{1}{2})^2 + 1\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

b $f_a'(x) = (x^2 + (a + 2)x + a)\,e^x$ geeft

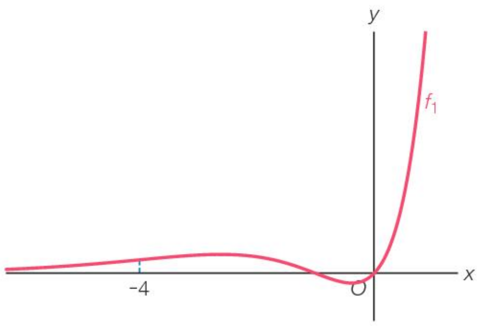
$f_a''(x) = (2x + a + 2)\,e^x + (x^2 + (a + 2)x + a)\,e^x = (x^2 + (a + 4)x + 2a + 2)\,e^x$

$f_a''(-4) = 0$ geeft $((-4)^2 - 4(a + 4) + 2a + 2)e^{-4} = 0$

$16 - 4a - 16 + 2a + 2 = 0$

$-2a = -2$

$a = 1$



Dus voor $a = 1$ gaat de grafiek van f_a bij $x = -4$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

49 $f(-2) = -\dfrac{4}{e}$ geeft $-2a\,e^{-2b} = -\dfrac{4}{e}$

$f(x) = ax\,e^{bx}$ geeft $f'(x) = a \cdot e^{bx} + ax \cdot e^{bx} \cdot b = (abx + a)\,e^{bx}$

$f'(-2) = 0$ geeft $(-2ab + a)\,e^{-2b} = 0$

$-2ab + a = 0$

$a(-2b + 1) = 0$

$a = 0 \quad \vee \quad 2b = 1$

vold. niet $b = \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}$ en $-2a\,e^{-2b} = -\dfrac{4}{e}$ geeft $-2ae^{-1} = -\dfrac{4}{e}$

$-2a = -4$

$a = 2$

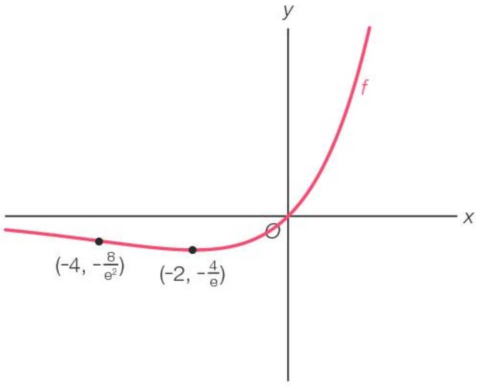
$f(x) = 2x\,e^{\frac{1}{2}x}$ en $f'(x) = (x + 2)\,e^{\frac{1}{2}x}$ geeft

$f''(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x} + (\frac{1}{2}x + 1)\,e^{\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{2}x + 2)\,e^{\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{2}x + 2)\,e^{\frac{1}{2}x} = 0$

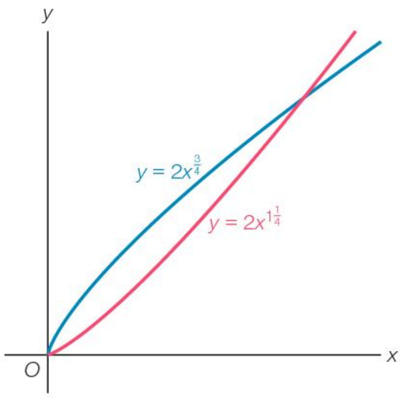
$$\frac{1}{2}x + 2 = 0$$
$$\frac{1}{2}x = -2$$
$$x = -4$$

$f(-4) = -8e^{-2} = -\dfrac{8}{e^2}$



Dus grafiek van $f_{a,b}$ met top $\left(-2, -\dfrac{4}{e}\right)$ gaat in het punt $\left(-4, -\dfrac{8}{e^2}\right)$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

50 **a**



b $y = 2x^p$ geeft $y' = 2px^{p-1}$ en $y'' = 2p(p-1)x^{p-2}$
Afnemend stijgend als $y' > 0$ en $y'' < 0$.
$y' > 0$ geeft $p > 0$
$y'' < 0$ geeft $0 < p < 1$
Dus de grafiek van $y = 2x^p$ is afnemend stijgend voor $0 < p < 1$.

Bladzijde 115

51 $y = \dfrac{375}{x\sqrt{x}} = \dfrac{375}{x^{1\frac{1}{2}}} = 375x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $y' = -562{,}5x^{-2\frac{1}{2}}$ en $y'' = 1406{,}25x^{-3\frac{1}{2}}$

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{-2\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-3\frac{1}{2}} > 0$, is $y' < 0$ en $y'' > 0$.
Dus y is afnemend dalend.

52 $\left.\begin{array}{l} y = ax\sqrt{x} \\ x = 25 \text{ en } y = 3 \end{array}\right\} 25a \cdot \sqrt{25} = 3$

$$25a \cdot 5 = 3$$
$$125a = 3$$
$$a = 0{,}024$$

Dus $y = 0{,}024x\sqrt{x}$.

$y = 0{,}024x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $y' = 0{,}036x^{\frac{1}{2}}$ en $y'' = 0{,}018x^{-\frac{1}{2}}$

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-\frac{1}{2}} > 0$, is $y' > 0$ en $y'' > 0$.
Dus y is toenemend stijgend.

© Noordhoff Uitgevers bv

53 **a** $\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{a}{W^{0,25}} \text{ oftewel } a = H \cdot W^{0,25} \\ W = 750 \text{ en } H = 40 \end{array}\right\} a = 40 \cdot 750^{0,25} \approx 209$

Dus $H = \dfrac{209}{W^{0,25}}$.

b $H = 200$ geeft $\dfrac{210}{W^{0,25}} = 200$

$$W^{0,25} = \frac{210}{200}$$

$$W = \left(\frac{210}{200}\right)^4 \approx 1{,}2$$

Het gevraagde gewicht is 1,2 kg.

c $H = \dfrac{210}{W^{0,25}} = 210W^{-0,25}$ geeft $\dfrac{dH}{dW} = -52{,}5W^{-1,25}$ en $\dfrac{d}{dW}\left(\dfrac{dH}{dW}\right) = 65{,}625W^{-2,25}$

Omdat voor elke $W > 0$ geldt $W^{-1,25} > 0$ en $W^{-2,25} > 0$, is $\dfrac{dH}{dW} < 0$ en $\dfrac{d}{dW}\left(\dfrac{dH}{dW}\right) > 0$.

Dus H is een afnemend dalende functie van W.

54 $E = aG^{-0,4}$ geeft $\dfrac{dE}{dG} = -0{,}4aG^{-1,4}$ en $\dfrac{d}{dG}\left(\dfrac{dE}{dG}\right) = 0{,}56aG^{-2,4}$

Omdat voor elke $a > 0$ en $G > 0$ geldt $aG^{-1,4} > 0$ en $aG^{-2,4} > 0$, is $\dfrac{dE}{dG} < 0$ en $\dfrac{d}{dG}\left(\dfrac{dE}{dG}\right) > 0$.

Dus E is een afnemend dalende functie van G.

55 **a** Neem $3d$ voor d in de formule $L = \dfrac{a}{d^2}$.

Je krijgt $L = \dfrac{a}{(3d)^2} = \dfrac{a}{9d^2} = \frac{1}{9} \cdot \dfrac{a}{d^2}$.

Dus de geluidssterkte wordt 9 keer zo klein.

b $L = \dfrac{a}{d^2} = ad^{-2}$ geeft $\dfrac{dL}{dd} = -2ad^{-3}$ en $\dfrac{d}{dd}\left(\dfrac{dL}{dd}\right) = 6ad^{-4}$

Omdat voor elke $a > 0$ en $d > 0$ geldt $ad^{-3} > 0$ en $ad^{-4} > 0$, is $\dfrac{dL}{dd} < 0$ en $\dfrac{d}{dd}\left(\dfrac{dL}{dd}\right) > 0$.

Dus L is een afnemend dalende functie van d.

Dus als de afstand tot een geluidsbron toeneemt, neemt de afname van de geluidssterkte af.

56 **a** $\left.\begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 108 \text{ en } T = 225 \end{array}\right\} a \cdot 225^b = 108$

$$a = \frac{108}{225^b}$$

$\left.\begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 1427 \text{ en } T = 10\,753 \end{array}\right\} a \cdot 10\,753^b = 1427$

$$a = \frac{1427}{10\,753^b}$$

Voer in $y_1 = \dfrac{108}{225^x}$ en $y_2 = \dfrac{1427}{10\,753^x}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}668$ en $y \approx 2{,}906$.

$b \approx 0{,}668$ en $a \approx 2{,}906$ geeft $A = 2{,}906T^{0,668}$

b $A = 2{,}91T^{\frac{2}{3}}$ geeft $\dfrac{dA}{dT} = 1{,}94T^{-\frac{1}{3}}$ en $\dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dA}{dT}\right) \approx -0{,}647T^{-1\frac{1}{3}}$

Omdat voor $T > 0$ geldt $T^{-\frac{1}{3}} > 0$ en $T^{-1\frac{1}{3}} > 0$, is $\dfrac{dA}{dT} > 0$ en $\dfrac{d}{dT}\left(\dfrac{dA}{dT}\right) < 0$.

Dus A is een afnemend stijgende functie van T.

c 19,3030 AE = 2 887 728 800 km

$A = 2887{,}7288$ geeft $2{,}91T^{\frac{2}{3}} = 2887{,}7288$

$$T^{\frac{2}{3}} = \frac{2887{,}7288}{2{,}91}$$

$$T = \left(\frac{2887{,}7288}{2{,}91}\right)^{\frac{3}{2}} = 31\,260{,}4...$$

Dus de omwentelingstijd is $\dfrac{31\,260{,}4...}{365} \approx 85{,}6$ jaar.

57 720 km/uur is $\frac{720}{3,6} = 200$ m/s.

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = av^2 \\ v = 200 \text{ en } W_1 = 120\,000 \end{array}\right\} a \cdot 200^2 = 120\,000$$
$$a = \frac{120\,000}{200^2} = 3$$

Dus $W_1 = 3v^2$.

$$\left.\begin{array}{l} W_i = \frac{b}{v^2} \\ v = 200 \text{ en } W_i = 300\,000 \end{array}\right\} \frac{b}{200^2} = 300\,000$$
$$b = 300\,000 \cdot 200^2 = 1,2 \cdot 10^{10}$$

Dus $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$.

$W = W_1 + W_i = 3v^2 + \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2} = 3v^2 + 1,2 \cdot 10^{10} \cdot v^{-2}$ geeft $\frac{dW}{dv} = 6v - 2,4 \cdot 10^{10} \cdot v^{-3} = 6v - \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3}$

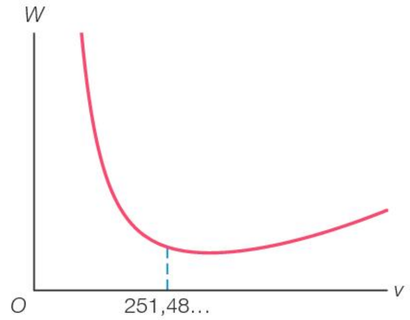
$\frac{dW}{dv} = 0$ geeft $6v - \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3} = 0$

$6v = \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3}$

$6v^4 = 2,4 \cdot 10^{10}$

$v^4 = 4 \cdot 10^9$

$v = 251,48...$



Schets van W, zie hiernaast.
Dus voor $v = 251,48...$ is W minimaal.
$v = 251,48...$ geeft $W_1 = 3 \cdot 251,48...^2 \approx 189\,737$ N

$v = 251,48...$ geeft $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{251,48...^2} \approx 189\,737$ N

Dus bij minimale totale weerstand geldt $W_1 = W_i$.

58 **a** $H = a \cdot \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$ geeft $\frac{dH}{dt} = a \cdot \frac{(2t+1) \cdot \frac{1}{2t+1} \cdot 2 - \ln(2t+1) \cdot 2}{(2t+1)^2} = a \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2}$

$\frac{dH}{dt} = 0$ geeft $a \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2} = 0$

$2 - 2\ln(2t+1) = 0$

$\ln(2t+1) = 1$

$2t + 1 = \mathrm{e}$

$2t = \mathrm{e} - 1$

$t = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$

Voor $t = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$ is $H = 10\,000$.

Dit geeft $a \cdot \frac{\ln(2 \cdot (\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}) + 1)}{2 \cdot (\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}) + 1} = 10\,000$

$a \cdot \frac{\ln(\mathrm{e} - 1 + 1)}{\mathrm{e} - 1 + 1} = 10\,000$

$a \cdot \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 10\,000$

$a \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = 10\,000$

$a = 10\,000\mathrm{e}$

Dus $H = 10\,000\mathrm{e} \cdot \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$.

b $a = 10\,000\mathrm{e}$ geeft $\frac{dH}{dt} = 10\,000\mathrm{e} \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2}$ (zie a)

$\left[\frac{dH}{dt}\right]_{t=2} = 10\,000\mathrm{e} \cdot \frac{2 - 2\ln(4+1)}{(4+1)^2} \approx -1325$

Op $t = 2$ neemt de hoeveelheid water die per uur wegstroomt af met 1325 m³ per uur.

 © Noordhoff Uitgevers bv

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

Bladzijde 118

59 $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3} = \frac{1}{3}(2x-3)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$

Dus $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}$ is een primitieve van $y = \sqrt{2x-3}$.

Dus bewering II is juist.

Bladzijde 119

60 $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{2x-3} = \frac{1}{2}x$

$$2x - 3 = \frac{1}{4}x^2$$
$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x-2)(x-6) = 0$$
$$x = 2 \vee x = 6$$

$$O(V) = \int_2^6 (f(x) - g(x))\,dx = \int_2^6 (\sqrt{2x-3} - \tfrac{1}{2}x)\,dx = \int_2^6 ((2x-3)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}(2x-3)^{1\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}x^2\right]_2^6$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3} - \tfrac{1}{4}x^2\right]_2^6 = \tfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - \tfrac{1}{4} \cdot 36 - (\tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - \tfrac{1}{4} \cdot 4) = \tfrac{2}{3}$$

61 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{5}{4x-2} = -\frac{1}{2}x + 3$

$$(-\tfrac{1}{2}x + 3)(4x-2) = 5$$
$$-2x^2 + x + 12x - 6 = 5$$
$$-2x^2 + 13x - 11 = 0$$
$$D = 13^2 - 4 \cdot -2 \cdot -11 = 81$$
$$x = \frac{-13+9}{-4} = 1 \vee x = \frac{-13-9}{-4} = 5\tfrac{1}{2}$$

$$O(V) = \int_1^{5\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^{5\frac{1}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}x + 3 - \frac{5}{4x-2}\right)dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \cdot \tfrac{1}{4}\ln|4x-2|\right]_1^{5\frac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cdot (5\tfrac{1}{2})^2 + 3 \cdot 5\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{4}\ln(4 \cdot 5\tfrac{1}{2} - 2) - (-\tfrac{1}{4} + 3 - 1\tfrac{1}{4}\ln(2)) = -7\tfrac{9}{16} + 16\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{4}\ln(20) + \tfrac{1}{4} - 3 + 1\tfrac{1}{4}\ln(2)$$
$$= 6\tfrac{3}{16} - 1\tfrac{1}{4}\ln(10)$$

Bladzijde 120

62 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{x+8}{x+1} = \frac{4x-4}{x+1}$

$$x + 8 = 4x - 4 \wedge x + 1 \neq 0$$
$$-3x = -12 \wedge x \neq -1$$
$$x = 4 \wedge x \neq -1$$
$$x = 4$$

$g(x) = 0$ geeft $4x - 4 = 0$

$$4x = 4$$
$$x = 1$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x+1} = \frac{x+1-1+8}{x+1} = 1 + \frac{7}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{4x-4}{x+1} = \frac{4(x+1)-4-4}{x+1} = 4 - \frac{8}{x+1}$$

$$O(V) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{7}{x+1}\right)dx + \int_1^4 \left(1 + \frac{7}{x+1} - 4 + \frac{8}{x+1}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{7}{x+1}\right)dx + \int_1^4 \left(-3 + \frac{15}{x+1}\right)dx = \left[x + 7\ln|x+1|\right]_0^1 + \left[-3x + 15\ln|x+1|\right]_1^4$$
$$= 1 + 7\ln(2) - (0 + 7\ln(1)) + -12 + 15\ln(5) - (-3 + 15\ln(2))$$
$$= 1 + 7\ln(2) - 12 + 15\ln(5) + 3 - 15\ln(2) = 15\ln(5) - 8\ln(2) - 8$$

63 $f_a(x) = \dfrac{ax+4}{2x-3} = \dfrac{\frac{1}{2}a(2x-3)+1\frac{1}{2}a+4}{2x-3} = \frac{1}{2}a + \dfrac{1\frac{1}{2}a+4}{2x-3}$

$$O(V) = \int_2^4 \left(\tfrac{1}{2}a + \dfrac{1\frac{1}{2}a+4}{2x-3}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}ax + (1\tfrac{1}{2}a+4)\cdot\tfrac{1}{2}\ln|2x-3|\right]_2^4$$
$$= 2a + (1\tfrac{1}{2}a+4)\cdot\tfrac{1}{2}\ln(5) - (a + (1\tfrac{1}{2}a+4)\cdot\tfrac{1}{2}\ln(1)) = 2a + (1\tfrac{1}{2}a+4)\cdot\tfrac{1}{2}\ln(5) - a - 0$$
$$= a + \tfrac{3}{4}a\ln(5) + 2\ln(5)$$

$O(V) = 10$ geeft $a + \frac{3}{4}a\ln(5) + 2\ln(5) = 10$

$$a(1+\tfrac{3}{4}\ln(5)) = 10 - 2\ln(5)$$
$$a = \dfrac{10-2\ln(5)}{1+\frac{3}{4}\ln(5)} \approx 3{,}07$$

64 $f(x) = g(x)$ geeft $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$\sin^2(x) = \sin(x)\cos(x)$

$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \cos(x)$

$\sin(x) = \cos(x)$ geeft $\tan(x) = 1$

$x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\pi$

Dus $x_A = \frac{1}{4}\pi$.

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, dus $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ oftewel $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Dus $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{4}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\cdot 0 - \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\cdot 1 - (-\tfrac{1}{4}\cdot 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{4}\cdot 0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\pi$$
$$O(W) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x))\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x)\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\cdot 0 + \tfrac{1}{4}\cdot 1 - (\tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{4}\cdot 1 + \tfrac{1}{4}\cdot 0) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}\pi$$
$$O(V) + O(W) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}\pi = 1 + \tfrac{1}{4}\pi$$

Bladzijde 121

65 **a** $O(V+W) = \int_0^p \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^p x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^p = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^p = \frac{2}{3}p\sqrt{p} - 0 = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$

b $O(W) = \frac{1}{2}\cdot p\cdot f(p) = \frac{1}{2}p\sqrt{p}$

c $O(V) = O(V+W) - O(W) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} - \frac{1}{2}p\sqrt{p} = \frac{1}{6}p\sqrt{p}$

d $O(V) : O(W) = \frac{1}{6}p\sqrt{p} : \frac{1}{2}p\sqrt{p} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$

Bladzijde 122

66 $O(V) = O(W)$

$1 + 2\ln(p) = p^2 - (1 + 2\ln(p))$

$1 + 2\ln(p) = p^2 - 1 - 2\ln(p)$

$2 + 4\ln(p) = p^2$

Voer in $y_1 = 2 + 4\ln(x)$ en $y_2 = x^2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}68$ en $x \approx 2{,}31$.

$x \approx 0{,}68$ voldoet niet, dus $p \approx 2{,}31$.

© Noordhoff Uitgevers bv

67 $O(V+W) = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3} = 27 - 9 - (-27+9) = 36$

$g_a(x) = 0$ geeft $a - x^2 = 0$

$x^2 = a$

$x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$

$O(W) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} g_a(x)\,dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx = \left[ax - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a} - (-a\sqrt{a} + \frac{1}{3}a\sqrt{a}) = 1\frac{1}{3}a\sqrt{a}$

$O(V) = O(W)$ geeft $O(W) = \frac{1}{2}O(V+W)$

$1\frac{1}{3}a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot 36$

$a\sqrt{a} = 13\frac{1}{2}$

$a^3 = 182\frac{1}{4}$

$a = \sqrt[3]{182\frac{1}{4}} \approx 5{,}67$

68 **a** $f_{3\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x$ geeft $f_{3\frac{1}{3}}'(x) = -x^2 + 2x + 3\frac{1}{3}$

$f_{3\frac{1}{3}}'(0) = 3\frac{1}{3}$, dus k: $y = 3\frac{1}{3}x$.

k snijden met de grafiek van $f_{3\frac{1}{3}}$ geeft $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x = 3\frac{1}{3}x$

$-\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$

$-\frac{1}{3}x^2(x-3) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

$f_{3\frac{1}{3}}(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x = 0$

$-\frac{1}{3}x(x^2 - 3x - 10) = 0$

$-\frac{1}{3}x(x+2)(x-5) = 0$

$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 5$

$O(W) = \int_{0}^{3} 3\frac{1}{3}x\,dx + \int_{3}^{5} (-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x)\,dx = \left[\frac{5}{3}x^2\right]_0^3 + \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2\right]_3^5$

$= 15 - 0 - \frac{625}{12} + \frac{125}{3} + \frac{125}{3} - (-\frac{27}{4} + 9 + 15) = 29$

b $f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$ geeft $f_a'(x) = -x^2 + 2x + a$

$f_a'(0) = a$, dus k: $y = ax$.

k snijden met de grafiek van f_a geeft $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax = ax$

$-\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$

$-\frac{1}{3}x^2(x-3) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

$O(V) = \int_{0}^{3} (-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax - ax)\,dx = \int_{0}^{3} (-\frac{1}{3}x^3 + x^2)\,dx$ en dit is onafhankelijk van a.

69 $f_a(x) = \frac{1}{4}x^2(x-a)^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2$ geeft $f_a'(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2x$

$f_a'(x) = 0$ geeft $x^3 - 1\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2x = 0$

$x(x^2 - 1\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a^2) = 0$

$x(x - \frac{1}{2}a)(x-a) = 0$

$x = 0 \vee x = \frac{1}{2}a \vee x = a$

$f_a(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{16}a^2(\frac{1}{2}a - a)^2 = \frac{1}{64}a^4$, dus $T(\frac{1}{2}a, \frac{1}{64}a^4)$.

$O(OABC) = a \cdot \frac{1}{64}a^4 = \frac{1}{64}a^5$

$O(V) = \int_{0}^{a} (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2)\,dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{8}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3\right]_0^a = \frac{1}{20}a^5 - \frac{1}{8}a^5 + \frac{1}{12}a^5 - 0 = \frac{1}{120}a^5$

De gevraagde verhouding is $\frac{1}{120}a^5 : \frac{1}{64}a^5 = 64 : 120 = 8 : 15$.

70 $f_a(x) = 0$ geeft $x = a$

$f_a(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $\sqrt{a-x} = 2\sqrt{x}$

$$a - x = 4x$$
$$-5x = -a$$
$$x = \tfrac{1}{5}a$$

$f_a(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{x}$ geeft $\sqrt{a-x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{x}$

$$a - x = \tfrac{1}{4}x$$
$$-\tfrac{5}{4}x = -a$$
$$x = \tfrac{4}{5}a$$

$$O(V+W) = \int_0^{\frac{1}{5}a} 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}a}^{a} \sqrt{a-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{5}a} 2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}a}^{a} (a-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{4}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{5}a} + \left[-\tfrac{2}{3}(a-x)^{1\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{5}a}^{a}$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{5}a} + \left[-\tfrac{2}{3}(a-x)\sqrt{a-x}\right]_{\frac{1}{5}a}^{a} = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{5}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} - 0 + 0 - -\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}a\sqrt{\tfrac{4}{5}a} = \tfrac{4}{15}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} + \tfrac{16}{15}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} = \tfrac{4}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a}$$

$$O(W) = \int_0^{\frac{4}{5}a} \tfrac{1}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{4}{5}a}^{a} \sqrt{a-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{4}{5}a} \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{4}{5}a}^{a} (a-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{4}{5}a} + \left[-\tfrac{2}{3}(a-x)^{1\frac{1}{2}}\right]_{\frac{4}{5}a}^{a}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{\frac{4}{5}a} + \left[-\tfrac{2}{3}(a-x)\sqrt{a-x}\right]_{\frac{4}{5}a}^{a} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{5}a\sqrt{\tfrac{4}{5}a} - 0 + 0 - -\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{5}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} = \tfrac{8}{15}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} + \tfrac{2}{15}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a} = \tfrac{2}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{5}a}$$

$O(W) = \tfrac{1}{2}O(V+W)$, dus $O(V) = O(W)$.

Bladzijde 123

71 **a** $f(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $f'(x) = 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

k: $y = ax + b$ met $a = f'(p^2) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2}} = \dfrac{1}{p}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{p}\cdot x + b \\ \text{door } P(p^2, 2p) \end{array}\right\} \dfrac{1}{p}\cdot p^2 + b = 2p$$
$$p + b = 2p$$
$$b = p$$

Dus k: $y = \dfrac{1}{p}\cdot x + p$.

b $\mathrm{rc}_l = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{2p}{p^2} = \dfrac{2}{p}$ geeft l: $y = \dfrac{2}{p}x$

$$O(V) = \int_0^{p^2}\left(2\sqrt{x} - \frac{2}{p}\cdot x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{p^2}\left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{p}\cdot x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{4}{3}x^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{p}\cdot x^2\right]_0^{p^2} = \left[\tfrac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{p}\cdot x^2\right]_0^{p^2} = \tfrac{4}{3}p^3 - p^3 = \tfrac{1}{3}p^3$$

$$O(W) = \int_0^{p^2}\left(\frac{1}{p}\cdot x + p - 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2p}\cdot x^2 + px - \tfrac{4}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{p^2} = \tfrac{1}{2}p^3 + p^3 - \tfrac{4}{3}p^3 = \tfrac{1}{6}p^3$$

$O(W) : O(V) = \tfrac{1}{6}p^3 : \tfrac{1}{3}p^3 = 1 : 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

72 $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2) = \ln^2(x) + 2\ln(x)$.

$$\int_q^{2q} g(x)\,dx = 0$$

$$\int_q^{2q} f'(x)\,dx = 0$$

$$\big[f(x)\big]_q^{2q} = 0$$

$f(2q) - f(q) = 0$
$\ln^2(2q) + 2\ln(2q) - (\ln^2(q) + 2\ln(q)) = 0$
$\ln^2(2q) - \ln^2(q) + 2\ln(2q) - 2\ln(q) = 0$
$(\ln(2q) - \ln(q))(\ln(2q) + \ln(q)) + 2(\ln(2q) - \ln(q)) = 0$
$\ln(2) \cdot \ln(2q^2) + 2\ln(2) = 0$
$\ln(2q^2) + 2 = 0$
$\ln(2q^2) = -2$
$2q^2 = e^{-2}$

$$q^2 = \frac{1}{2e^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2e^2}} \vee q = -\sqrt{\frac{1}{2e^2}}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e} \quad \text{vold. niet}$$

Dus $q = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot e}$.

73 **a** $I(L) = \pi \int_0^p (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_0^p x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^p = \frac{1}{2}\pi p^2$

b $y = \sqrt{x}$ geeft $y^2 = x$ oftewel $x = y^2$

$I(M) = \pi \int_0^{\sqrt{p}} x^2\,dy = \pi \int_0^{\sqrt{p}} y^4\,dy = \pi\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^{\sqrt{p}} = \frac{1}{5}\pi p^2 \cdot \sqrt{p}$

c $I(L) = I(M)$ geeft $\frac{1}{2}\pi p^2 = \frac{1}{5}\pi p^2 \cdot \sqrt{p}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{5}\sqrt{p}$
$\sqrt{p} = \frac{5}{2}$
$p = 6\frac{1}{4}$

Bladzijde 125

74 **a** $I(M) = 1\frac{2}{5}I(L)$ geeft $\left(21 - \dfrac{21}{a^2}\right)\pi = \frac{7}{5} \cdot 15\frac{3}{4}\pi$

$$21 - \frac{21}{a^2} = 22\tfrac{1}{20}$$

$$\frac{21}{a^2} = -\tfrac{21}{20}$$

$$a^2 = -20$$

$a^2 = -20$ heeft geen oplossingen, dus $I(M) = 1\frac{2}{5}I(L)$ lukt niet.

b $I(M) = 1\frac{3}{10}I(L)$ geeft $\left(21 - \dfrac{21}{a^2}\right)\pi = \frac{13}{10} \cdot 15\frac{3}{4}\pi$

$$21 - \frac{21}{a^2} = 20\tfrac{19}{40}$$

$$\frac{21}{a^2} = \tfrac{21}{40}$$

$$a^2 = 40$$

$a^2 = 40$ heeft twee oplossingen, dus $I(M) = 1\frac{3}{10}I(L)$ lukt wel.

75 **a** $f(x) = g_a(x)$ geeft $x^2 = a\sqrt{x}$

$x^{1\frac{1}{2}} = a$

$x = a^{\frac{2}{3}}$

$x = \sqrt[3]{a^2}$

$$O(V) = \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (a\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (ax^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}ax^{1\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt[3]{a^2}} = \tfrac{2}{3}a^2 - \tfrac{1}{3}a^2 = \tfrac{1}{3}a^2$$

$O(V) = 10$ geeft $\frac{1}{3}a^2 = 10$

$a^2 = 30$

$a = \sqrt{30} \vee a = -\sqrt{30}$

vold. niet

Dus $a = \sqrt{30}$.

b $$I(L) = \pi\int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (a^2x - x^4)\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt[3]{a^2}} = \pi(\tfrac{1}{2}a^2 \cdot a^{1\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{5}a^{3\frac{1}{3}}) = \tfrac{3}{10}\pi a^{3\frac{1}{3}}$$

$I(L) = 30\pi$ geeft $\frac{3}{10}\pi a^{3\frac{1}{3}} = 30\pi$

$a^{3\frac{1}{3}} = 100$

$a = 100^{\frac{3}{10}}$

$a = \sqrt[10]{1\,000\,000}$

Bladzijde 126

76 **a** Is de top van p_2 het punt $T(t, t^2)$, dan is $(2t, 0)$ het andere snijpunt van p_2 met de x-as.
Dus p_2: $y = ax(x - 2t)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax(x - 2t) \\ \text{door } (t, t^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} at(t - 2t) = t^2 \\ at \cdot -t = t^2 \\ a = -1 \end{array}$$

Dus p_2: $y = -x(x - 2t)$ oftewel p_2: $y = -x^2 + 2tx$.

b $$O(V) = \int_0^t (-x^2 + 2tx - x^2)\,dx = \int_0^t (-2x^2 + 2tx)\,dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + tx^2\right]_0^t = -\tfrac{2}{3}t^3 + t^3 = \tfrac{1}{3}t^3$$

$O(V) = 10$ geeft $\frac{1}{3}t^3 = 10$

$t^3 = 30$

$t = \sqrt[3]{30}$

c $$I(L) = \pi\int_0^t ((-x^2 + 2tx)^2 - (x^2)^2)\,dx = \pi\int_0^t (x^4 - 4tx^3 + 4t^2x^2 - x^4)\,dx = \pi\int_0^t (-4tx^3 + 4t^2x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[-tx^4 + \tfrac{4}{3}t^2x^3\right]_0^t = \pi(-t^5 + \tfrac{4}{3}t^5) = \tfrac{1}{3}\pi t^5$$

$I(L) = 100\pi$ geeft $\frac{1}{3}\pi t^5 = 100\pi$

$t^5 = 300$

$t = \sqrt[5]{300}$

77 **a** $e^x = a$ geeft $x = \ln(a)$, dus k: $x = \ln(a)$.

$$O(V) = \int_0^{\ln(a)} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln(a)} = e^{\ln(a)} - e^0 = a - 1$$

$O(W) = a \cdot \ln(a) - O(V) = a\ln(a) - (a - 1) = a\ln(a) - a + 1$

$O(V) = O(W)$ geeft $a - 1 = a\ln(a) - a + 1$

$2a - 2 = a\ln(a)$

Voer in $y_1 = 2x - 2$ en $y_2 = x\ln(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 1$ en $x \approx 4{,}92$.
Dus $a \approx 4{,}92$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $I(L)=\pi\int_0^{\ln(a)}(\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\ln(a)}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln(a)}=\pi(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln(a)}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^0)=\pi(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\ln(a)})^2-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi$

$I(M)=\pi\cdot a^2\cdot\ln(a)-I(L)=\pi a^2\ln(a)-(\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi)=\pi a^2\ln(a)-\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi$

$I(L)=I(M)$ geeft $\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi=\pi a^2\ln(a)-\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi$

$\pi a^2-\pi=\pi a^2\ln(a)$

$a^2-1=a^2\ln(a)$

Voer in $y_1=x^2-1$ en $y_2=x^2\ln(x)$.
De optie snijpunt geeft $x=1$ en $x\approx 2{,}22$.
Dus $a\approx 2{,}22$.

c $G(x)=x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x$ geeft

$G'(x)=1\cdot\ln^2(x)+x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}-\left(2\cdot\ln(x)+2x\cdot\frac{1}{x}\right)+2=\ln^2(x)+2\ln(x)-2\ln(x)-2+2=\ln^2(x)$

$G'(x)=g(x)$, dus G is een primitieve van g.

d $y=\mathrm{e}^x$ geeft $x=\ln(y)$

$I(N)=\pi\int_1^a x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_1^a\ln^2(y)\,\mathrm{d}y=\pi\left[y\ln^2(y)-2y\ln(y)+2y\right]_1^a$

$=\pi(a\ln^2(a)-2a\ln(a)+2a-(\ln^2(1)-2\ln(1)+2))=\pi(a\ln^2(a)-2a\ln(a)+2a-2)$

$I(L)=6\cdot I(N)$ geeft $\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{1}{2}\pi=6\pi(a\ln^2(a)-2a\ln(a)+2a-2)$

$a^2-1=12(a\ln^2(a)-2a\ln(a)+2a-2)$

Voer in $y_1=x^2-1$ en $y_2=12(x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x-2)$.
De optie snijpunt geeft $x\approx 0{,}51$, $x=1$ en $x\approx 2{,}28$.
Dus $a\approx 2{,}28$.

Bladzijde 127

78 **a** $y=\frac{1}{2}x^2-2$ geeft $\frac{1}{2}x^2=y+2$, dus $x^2=2y+4$.

De inhoud van de afgeknotte paraboloïde is $I=\pi\int_0^p x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^p(2y+4)\,\mathrm{d}y=\pi\left[y^2+4y\right]_0^p=\pi(p^2+4p)$.

$f(x)=\frac{1}{2}p$ geeft $\frac{1}{2}x^2-2=\frac{1}{2}p$

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}p+2$

$x^2=p+4$

Dus $A=\pi(p+4)$.
Samen met hoogte p geeft dit $p\cdot A=p\cdot\pi(p+4)=\pi(p^2+4p)$, en dit is gelijk aan I.
Dus voor de inhoud I van de afgeknotte paraboloïde geldt $I=p\cdot A$.

b PQ is een middellijn van de cirkel, dus de straal van de cirkel en dus van de bol is $\sqrt{p+4}$ (zie a).
Dus $I(\text{bol})=\frac{4}{3}\pi(p+4)\sqrt{p+4}$.

$I(\text{bol})=I(\text{afgeknotte paraboloïde})$ geeft $\frac{4}{3}\pi(p+4)\sqrt{p+4}=\pi(p^2+4p)$

$\frac{4}{3}(p+4)\sqrt{p+4}=p(p+4)$

$p+4=0\vee\frac{4}{3}\sqrt{p+4}=p$

$p=-4\quad\vee 4\sqrt{p+4}=3p$

vold. niet $\quad 16(p+4)=9p^2$

$16p+64=9p^2$

$9p^2-16p-64=0$

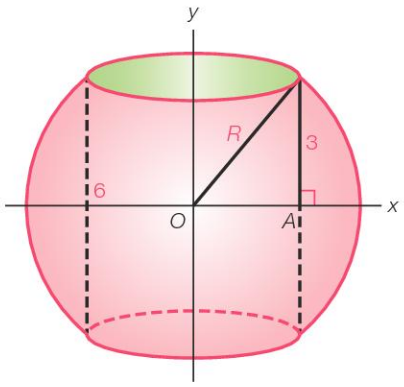
$D=(-16)^2-4\cdot 9\cdot -64=2560$

$p=\frac{16+\sqrt{2560}}{18}\vee p=\frac{16-\sqrt{2560}}{18}$

vold. niet

$p=\frac{16+\sqrt{2560}}{18}$ geeft straal bol $=\sqrt{\frac{16+\sqrt{2560}}{18}+4}\approx 2{,}77$

79 Stel de straal van de bol is R.
Dan is de inhoud van de bol $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Uit de bol zijn een cilinder en twee 'kapjes' geboord.
Zie de figuur hiernaast met een dwarsdoorsnede van de situatie in een assenstelsel.



$\angle A = 90°$, dus $OA = \sqrt{R^2 - 9}$.
De inhoud van de cilinder is $\pi \cdot (R^2 - 9) \cdot 6 = 6\pi R^2 - 54\pi$.
De dwarsdoorsnede van de bol is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = R^2$. Hieruit volgt $x^2 = R^2 - y^2$.
De inhoud van een kapje is

$$\pi\int_3^R x^2\,dy = \pi\int_3^R (R^2 - y^2)\,dy = \pi\left[R^2y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_3^R = \pi(R^3 - \tfrac{1}{3}R^3 - (3R^2 - 9))$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^3 - 3\pi R^2 + 9\pi.$$

$$I(\text{bol}) - I(\text{cilinder}) - 2 \cdot I(\text{kapje}) = \tfrac{4}{3}\pi R^3 - (6\pi R^2 - 54\pi) - 2 \cdot (\tfrac{2}{3}\pi R^3 - 3\pi R^2 + 9\pi)$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R^2 + 54\pi - \tfrac{4}{3}\pi R^3 + 6\pi R^2 - 18\pi$$
$$= 36\pi$$

De inhoud van het deel dat er overblijft, is dus 36π.

Diagnostische toets

Bladzijde 130

1 Stel $x_C = a$, dan is $x_B = 2a$.

$f(2a) = g(a)$ geeft $\ln(\frac{1}{2} \cdot 2a) = \ln\left(\dfrac{2}{3 - a}\right)$

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{2}{3 - a}\right)$$
$$a = \frac{2}{3 - a}$$
$$3a - a^2 = 2$$
$$a^2 - 3a + 2 = 0$$
$$(a - 1)(a - 2) = 0$$
$$a = 1 \vee a = 2$$

$p = f(2a) = f(2) = \ln(1) = 0$ vold. niet
$p = f(2a) = f(4) = \ln(2)$

2 $f_p(x) = \dfrac{10x - 15}{x^2 + 4} + p$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x^2 + 4) \cdot 10 - (10x - 15) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{10x^2 + 40 - 20x^2 + 30x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{-10x^2 + 30x + 40}{(x^2 + 4)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-10x^2 + 30x + 40 = 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x + 1)(x - 4) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 4$$

$y_A = f_p(-1) = \dfrac{-10 - 15}{1 + 4} + p = -5 + p$ en $OA^2 = (-1)^2 + (-5 + p)^2 = 1 + 25 - 10p + p^2 = p^2 - 10p + 26$.

$y_B = f_p(4) = \dfrac{40 - 15}{6 + 4} + p = 1\frac{1}{4} + p$ en $OB^2 = 4^2 + (1\frac{1}{4} + p)^2 = 16 + 1\frac{9}{16} + 2\frac{1}{2}p + p^2 = p^2 + 2\frac{1}{2}p + 17\frac{9}{16}$.

$OA = OB$ oftewel $OA^2 = OB^2$ geeft $p^2 - 10p + 26 = p^2 + 2\frac{1}{2}p + 17\frac{9}{16}$

$$-12\tfrac{1}{2}p = -8\tfrac{7}{16}$$
$$p = \tfrac{27}{40}$$

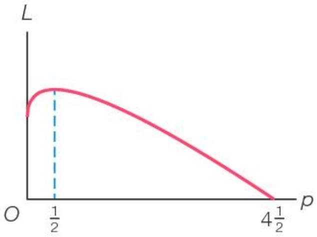
© Noordhoff Uitgevers bv

3 $L = g(p) - f(p) = 3\frac{1}{2} - p - (2 - \sqrt{2p}) = 1\frac{1}{2} - p + \sqrt{2p}$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2p}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2p}} - 1$$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\frac{1}{\sqrt{2p}} - 1 = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} = 1$$
$$\sqrt{2p} = 1$$
$$2p = 1$$
$$p = \frac{1}{2}$$



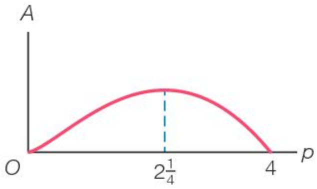
Dus voor $p = \frac{1}{2}$ is L maximaal.

4 **a** $A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (2\sqrt{p} - p) = p\sqrt{p} - \frac{1}{2}p^2 = p^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}p^2$ geeft $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 1\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} - p = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} - p$

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{p} - p = 0$

$$p = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$$
$$p^2 = 2\frac{1}{4}p$$
$$p = 0 \quad \vee \quad p = 2\frac{1}{4}$$

vold. niet



Dus voor $p = 2\frac{1}{4}$ is de oppervlakte van driehoek OPQ maximaal.

$A_{\text{max}} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot (2\frac{1}{4})^2 = 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{16} = 3\frac{3}{8} - 2\frac{17}{32} = \frac{27}{32}$

b $L = BP = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(p-3)^2 + (2\sqrt{p} - p - 0)^2} = \sqrt{(p-3)^2 + (2\sqrt{p} - p)^2}$

$= \sqrt{p^2 - 6p + 9 + 4p - 4p\sqrt{p} + p^2} = \sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}$

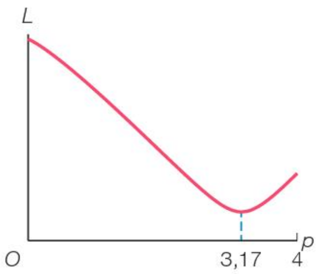
c $L = \sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9} = (2p^2 - 4p^{1\frac{1}{2}} - 2p + 9)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{2}(2p^2 - 4p^{1\frac{1}{2}} - 2p + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4p - 6p^{\frac{1}{2}} - 2) = \frac{4p - 6\sqrt{p} - 2}{2\sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}} = \frac{2p - 3\sqrt{p} - 1}{\sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}}$$

Er moet gelden $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ oftewel $2p - 3\sqrt{p} - 1 = 0$.

Voer in $y_1 = 2x - 3\sqrt{x} - 1$.

De optie nulpunt geeft $x \approx 3{,}17$.



Dus voor $p \approx 3{,}17$ is L minimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 131

5 **a** $\sin(\alpha) = \dfrac{AS}{5}$ geeft $AS = 5\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \dfrac{BS}{5}$ geeft $BS = 5\cos(\alpha)$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADS$ geeft $DS = \sqrt{6^2 - (5\sin(\alpha))^2} = \sqrt{36 - 25\sin^2(\alpha)}$.

$BD = BS + DS = 5\cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25\sin^2(\alpha)}$

b $O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABD) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5\cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25\sin^2(\alpha)}) \cdot 5\sin(\alpha)$

Voer in $y_1 = (5\cos(x) + \sqrt{36 - 25\sin^2(x)}) \cdot 5\sin(x)$.

De optie maximum geeft $x = 50{,}19...$

Dus de oppervlakte van $ABCD$ is maximaal voor $\alpha \approx 50°$.

Alternatieve uitwerking

De oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is maximaal als de oppervlakte van $\triangle ABD$ maximaal is.

Dat is het geval als de hoogte die bij de zijde AB hoort maximaal is. En dat is het geval als $\angle A = 90°$.

Dit geeft $\tan(\alpha) = \dfrac{AD}{AB} = \frac{6}{5}$ en hieruit volgt $\alpha \approx 50°$.

6 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 5$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 18$

$f'(1) = -22 < 0$, dus de grafiek van f is dalend voor $x = 1$.

$f''(1) = -12 < 0$, dus de grafiek van f is toenemend dalend voor $x = 1$.

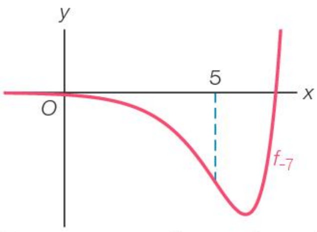
7 $f_a(x) = (x + a)\,e^x$ geeft $f_a'(x) = 1 \cdot e^x + (x + a) \cdot e^x = (x + a + 1)\,e^x$

$f_a'(x) = (x + a + 1)\,e^x$ geeft $f_a''(x) = 1 \cdot e^x + (x + a + 1) \cdot e^x = (x + a + 2)\,e^x$

$f_a''(5) = 0$ geeft $(a + 7)e^5 = 0$

$a + 7 = 0$

$a = -7$



Dus voor $a = -7$ gaat de grafiek van f_a bij $x = 5$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

8 **a** y is evenredig is met $x \cdot \sqrt[3]{x}$, dus $y = ax \cdot \sqrt[3]{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = ax \cdot \sqrt[3]{x} \\ x = 8 \text{ en } y = 40 \end{array}\right\} 8a \cdot \sqrt[3]{8} = 40$$

$8a \cdot 2 = 40$

$16a = 40$

$a = 2\frac{1}{2}$

Dus $y = 2\frac{1}{2}x \cdot \sqrt[3]{x} = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{3}}$ en dit geeft $y' = 3\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$ en $y'' = 1\frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}$.

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{\frac{1}{3}} > 0$ en $x^{-\frac{2}{3}} > 0$, is $y' > 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is toenemend stijgend voor $x > 0$.

b y is omgekeerd evenredig met $e^{0,1x}$, dus $y = \dfrac{a}{e^{0,1x}}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{a}{e^{0,1x}} \\ x = 10 \text{ en } y = 4 \end{array}\right\} \dfrac{a}{e^1} = 4$$

$a = 4e$

Dus $y = \dfrac{4e}{e^{0,1x}} = 4\,e^{1 - 0,1x}$ en dit geeft $y' = 4\,e^{1 - 0,1x} \cdot -0{,}1 = -0{,}4\,e^{1 - 0,1x}$ en

$y'' = -0{,}4\,e^{1 - 0,1x} \cdot -0{,}1 = 0{,}04\,e^{1 - 0,1x}$.

Omdat geldt $e^{1 - 0,1x} > 0$, is $y' < 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is afnemend dalend.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 $f(x) = g(x)$ geeft $\dfrac{-2x+4}{2x-1} = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

$-2x + 4 = (2x-1)(-\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3})$

$-2x + 4 = -1\frac{1}{3}x^2 + 5\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x - 2\frac{2}{3}$

$1\frac{1}{3}x^2 - 8x + 6\frac{2}{3} = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

$x = 1 \vee x = 5$

$$f(x) = \frac{-2x+4}{2x-1} = \frac{-(2x-1)-1+4}{2x-1} = -1 + \frac{3}{2x-1}$$

$$O(V) = \int_1^5 \left(-\tfrac{2}{3}x + 2\tfrac{2}{3} - \left(-1 + \frac{3}{2x-1}\right)\right)\mathrm{d}x = \int_1^5 \left(-\tfrac{2}{3}x + 3\tfrac{2}{3} - \frac{3}{2x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}x^2 + 3\tfrac{2}{3}x - 1\tfrac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_1^5$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cdot 25 + 3\tfrac{2}{3}\cdot 5 - 1\tfrac{1}{2}\ln(9) - (-\tfrac{1}{3} + 3\tfrac{2}{3} - 1\tfrac{1}{2}\ln(1)) = -8\tfrac{1}{3} + 18\tfrac{1}{3} - 1\tfrac{1}{2}\ln(3^2) - 3\tfrac{1}{3} = 6\tfrac{2}{3} - 3\ln(3)$$

10 **a** $y = 4\ln(x)$ geeft $\ln(x) = \frac{1}{4}y$

$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}y}$

$$O(V) = \int_0^p \mathrm{e}^{\frac{1}{4}y}\,\mathrm{d}y = \left[4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}y}\right]_0^p = 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}p} - 4$$

$O(V) = O(W)$ oftewel $O(V) = \frac{1}{2}p^2$ geeft $4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}p} - 4 = \frac{1}{2}p^2$.

Voer in $y_1 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x} - 4$ en $y_2 = \frac{1}{2}x^2$.
De optie snijpunt geeft $x = 2{,}963...$, dus $p \approx 2{,}96$.

b $y = 4\ln(x)$ geeft $\ln(x) = \frac{1}{4}y$

$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}y}$

$x^2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}$

$$I(L) = \pi\int_0^p x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^p \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}\,\mathrm{d}y = \pi\left[2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}\right]_0^p = \pi(2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p} - 2)$$

$I(L) = I(M)$ oftewel $I(L) = \frac{1}{2}\cdot I(\text{cilinder})$ geeft $\pi(2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p} - 2) = \frac{1}{2}\pi p^2 \cdot p$

$2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p} - 2 = \frac{1}{2}p^3$

Voer in $y_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 2$ en $y_2 = \frac{1}{2}x^3$.
De optie snijpunt met $1\frac{1}{2} < x < 8$ geeft $x = 1{,}801...$
Dus $p \approx 1{,}80$.

16 Examentraining

16.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 134

1 **a** $Q = 50$ geeft $36x^3 = 50$, dus $x = \sqrt[3]{\frac{25}{18}}$.

$$\frac{P}{Q} = \frac{23x^2}{36x^3} = \frac{23}{36x} = \frac{23}{36 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{18}}} \approx 0{,}57$$

b $\dfrac{10}{3x-5} = 3x - 8$

$(3x-5)(3x-8) = 10$

$9x^2 - 24x - 15x + 40 = 10$

$9x^2 - 39x + 30 = 0$

$3x^2 - 13x + 10 = 0$

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 49$

$x = \dfrac{13+7}{6} = 3\frac{1}{3} \vee x = \dfrac{13-7}{6} = 1$

c $\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{3}$, dus $AD = 3\cos(\alpha)$.

$\sin(\alpha) = \dfrac{CD}{3}$, dus $CD = 3\sin(\alpha)$.

$BD = \sqrt{10^2 - (3\sin(\alpha))^2} = \sqrt{100 - 9\sin^2(\alpha)}$

$AB = AD + BD = 3\cos(\alpha) + \sqrt{100 - 9\sin^2(\alpha)}$

d
$$\left.\begin{array}{l} F = \dfrac{10a}{b^2} \\ a = \dfrac{c}{2b} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} F = \dfrac{10}{b^2} \cdot \dfrac{c}{2b} = \dfrac{10c}{2b^3} = \dfrac{5c}{b^3} \\ b = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} F = \frac{5c}{((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{5c}{(x^2+y^2)^{1\frac{1}{2}}}$$

e
$$\left.\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{A^2x}{p}, \text{ dus } y^4 = \dfrac{A^4x^2}{p^2} \\ p^2 = A + B \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^4 = \dfrac{A^4x^2}{A+B} \\ y = \sqrt[4]{\dfrac{A^4x^2}{A+B}} = A \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{A+B}} \end{array}$$

f
$$g(x) = \frac{5}{2+\sqrt{x+4}} \cdot \frac{2-\sqrt{x+4}}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{10-5\sqrt{x+4}}{4-(x+4)} = \frac{10-5\sqrt{x+4}}{-x} = \frac{5\sqrt{x+4}-10}{x} = f(x)$$

g $N = at + b$

$P(5) = 100$, dus $16N^3 = 100$ en dit geeft $N = \sqrt[3]{\frac{100}{16}} = \sqrt[3]{6{,}25}$.

$P(8) = 200$, dus $16N^3 = 200$ en dit geeft $N = \sqrt[3]{\frac{200}{16}} = \sqrt[3]{12{,}5}$.

$$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\sqrt[3]{12{,}5} - \sqrt[3]{6{,}25}}{8-5} = 0{,}159...$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 0{,}159...t + b \\ t = 5 \text{ en } N = \sqrt[3]{6{,}25} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}159... \cdot 5 + b = \sqrt[3]{6{,}25} \\ b = 1{,}044... \end{array}$$

Dus $N = 0{,}16t + 1{,}04$.

© Noordhoff Uitgevers bv

h $\left.\begin{array}{l} P = aQ \\ Q = 30 \text{ en } P = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 30a = 12 \\ a = 0{,}4 \end{array}$

Dus $P = 0{,}4Q$.

$Q \cdot R^{\frac{1}{3}} = 10$, dus $R^{\frac{1}{3}} = \dfrac{10}{Q}$ en $R = \dfrac{1000}{Q^3}$.

$$S = \frac{R}{R+1} = \frac{\dfrac{1000}{Q^3}}{\dfrac{1000}{Q^3} + 1} = \frac{1000}{1000 + Q^3}$$

$$T = 50PS = 50 \cdot 0{,}4Q \cdot \frac{1000}{1000 + Q^3} = \frac{20\,000Q}{Q^3 + 1000}$$

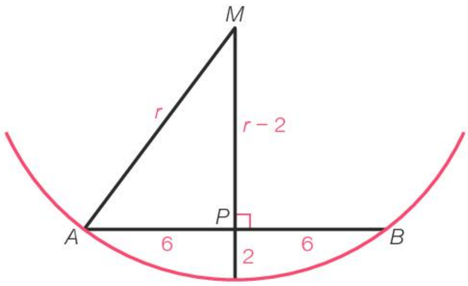
i Voer in $y_1 = \dfrac{100}{\sqrt{x^2 + 17^2}} + \dfrac{100}{\sqrt{17^2 + (30 - x)^2}}$.

De optie minimum geeft $x = 15$ en $y = 8{,}821...$

De optie maximum geeft $x = 5{,}062...$ en $y = 8{,}951...$ en ook $x = 24{,}937...$ en $y = 8{,}951...$

Dus $\dfrac{8{,}951... - 8{,}821...}{8{,}821...} \times 100\% \approx 1{,}47\%$.

j



$MP^2 + AP^2 = AM^2$

$(r - 2)^2 + 6^2 = r^2$

$r^2 - 4r + 4 + 36 = r^2$

$-4r = -40$

$r = 10$

Dus de straal van de cirkel is 10.

Bladzijde 142

2 **a** $AB = 1 + 4 = 5$

$\cos(\alpha) = \dfrac{AE}{1}$ geeft $AE = \cos(\alpha)$

$\sin(\alpha) = \dfrac{CE}{1}$ geeft $CE = \sin(\alpha)$

In $\triangle CDE$ is $DE^2 = 16 - \sin^2(\alpha)$

$DE = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$

$s = AB - AD = 5 - AE - DE = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$

b Voer in $y_1 = |5 - \cos(x) - \sqrt{16 - \sin^2(x)} - (1 - \cos(x) + \frac{1}{8}\sin^2(x))|$.

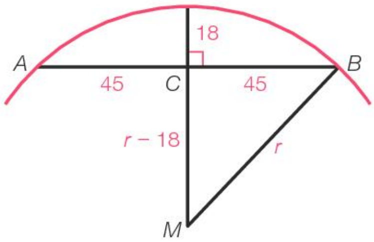
De optie maximum geeft $x = 1{,}5707...$ en $y = 0{,}0020...$

Dus het maximale verschil is ongeveer 0,002.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 143

3



In $\triangle BCM$ is $r^2 = (r-18)^2 + 45^2$

$r^2 = r^2 - 36r + 324 + 2025$

$36r = 2349$

$r = 65\frac{1}{4}$

Dus de straal is ongeveer 65 cm.

4 $\dfrac{5}{4x-6} = x - 3\frac{1}{2}$

$(4x-6)(x-3\frac{1}{2}) = 5$

$4x^2 - 20x + 21 = 5$

$4x^2 - 20x + 16 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$

$x = 1$ geeft $A(1, -2\frac{1}{2})$

$x = 4$ geeft $B(4, \frac{1}{2})$

Bladzijde 144

5 **a**
$$\left.\begin{aligned} &\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \\ &E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}\right\} E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}$$

$r^2 = x^2 + d^2$, dus $r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$ en $r^3 = (x^2 + d^2)^{1\frac{1}{2}}$.

Dit geeft $E = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \dfrac{x}{(x^2 + d^2)^{1\frac{1}{2}}}$.

b $E_{\text{totaal}} = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2 + d^2)^{1\frac{1}{2}}} + \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2 + (40-d)^2)^{1\frac{1}{2}}}$

Voer in $y_1 = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2 + x^2)^{1\frac{1}{2}}} + \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2 + (40-x)^2)^{1\frac{1}{2}}}$.

De optie minimum geeft $x = 20$ en $y = 0{,}0606...$

De optie maximum geeft $x = 1{,}924...$ en $y = 0{,}0736...$ en ook $x = 38{,}075...$ en $y = 0{,}0736...$

$\dfrac{0{,}0606...}{0{,}0736...} \times 100\% = 82{,}34...\%$

Dus het werkoppervlak wordt voldoende gelijkmatig verlicht.

Bladzijde 145

6
$$\left.\begin{aligned} &\text{(1) geeft } v^2 = v_0^2 + 2g(h_0 - h) = v_0^2 + 2gx, \text{ dus } v = \sqrt{v_0^2 + 2gx} \\ &\text{(2) geeft } r^2 = r_0^2 \cdot \frac{v_0}{v} \end{aligned}\right\} r^2 = r_0^2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}$$

$$r^4 = r_0^4 \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}$$

$$r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}}$$

7 $h(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} = \dfrac{2 - 2\sqrt{x+1}}{1 - (x+1)} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x} = f(x)$ voor $x \neq 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 146

8 **a** $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3^3$ geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$

$$\frac{A}{V} = \frac{4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}\right)^2}{27} \approx 1{,}61$$

b $r(t) = at + 1{,}5$

$V(0) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = 14{,}137...$, dus $V(10) = \frac{1}{2} \cdot 14{,}137... = 7{,}068...$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 7{,}068...$ geeft $r = 1{,}190...$

$r(10) = 1{,}190...$ geeft $10a + 1{,}5 = 1{,}190...$

$a = -0{,}030...$

Dus $r(t) = -0{,}030...t + 1{,}5$.

$r(t) = 0$ geeft $-0{,}030...t + 1{,}5 = 0$

$t = 48{,}47...$

Dus vanaf 49 minuten.

Bladzijde 147

9
$$\left.\begin{array}{l} N = aV \\ V = 20 \text{ en } N = 6 \end{array}\right\} a \cdot 20 = 6$$

$a = 0{,}3$, dus $N = 0{,}3V$

$V \cdot T^{0,25} = 150$ geeft $T^{0,25} = \frac{150}{V}$, dus $T = \left(\frac{150}{V}\right)^4$.

$$d = \frac{T}{T+2} = \frac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4} + 2} = \frac{150^4}{150^4 + 2V^4} = \frac{1}{1 + \frac{2}{150^4} \cdot V^4}$$

$$A = 1440 \cdot N \cdot d = 1440 \cdot 0{,}3V \cdot \frac{1}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1} = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$$

16.2 Functies en grafieken

Bladzijde 148

10 **a** Stel de lengte van het vierkant is p.

Dan geldt $f(1 + p) = p$, dus $(1 + p - 4)^2 = p$

$(p - 3)^2 = p$

$p^2 - 6p + 9 - p = 0$

$p^2 - 7p + 9 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$

$p = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \vee p = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$

vold. niet

Dus de lengte van het vierkant is $\frac{7 - \sqrt{13}}{2} = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

b Er moet gelden $f_a(4 + p) + f_a(4 - p) = 2 \cdot y_p$.

$$f_a(4 + p) + f_a(4 - p) = \frac{16 + 4p + a}{4 + p - 4} + \frac{16 - 4p + a}{4 - p - 4} = \frac{16 + 4p + a}{p} - \frac{16 - 4p + a}{p} = \frac{8p}{p} = 8 = 2 \cdot y_p$$

Dus voor elke waarde van a is de grafiek van f_a puntsymmetrisch in $P(4, 4)$.

c Voor f geldt $y = \frac{1}{2}(x - 4)^3 + 3$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{1}{2}(y - 4)^3 + 3$

$2x = (y - 4)^3 + 6$

$(y - 4)^3 = 2x - 6$

$y - 4 = \sqrt[3]{2x - 6}$

$y = 4 + \sqrt[3]{2x - 6}$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = 4 + \sqrt[3]{2x - 6}$.

d Voor f_b geldt $y = \dfrac{3}{x-2} + b$, dus voor f_b^{inv} geldt $x = \dfrac{3}{y-2} + b$

$$\frac{3}{y-2} = x - b$$

$$y - 2 = \frac{3}{x-b}$$

$$y = \frac{3}{x-b} + 2$$

$f_b^{\text{inv}} = f_b$ voor $b = 2$.

e $f(x) = \dfrac{6}{2x-5}$

$\downarrow$ translatie $(-3, 2)$

$g(x) = \dfrac{6}{2(x+3)-5} + 2 = \dfrac{6}{2x+1} + 2$

Voor g geldt $y = \dfrac{6}{2x+1} + 2$, dus voor g^{inv} geldt $x = \dfrac{6}{2y+1} + 2$

$$\frac{6}{2y+1} = x - 2$$

$$2y + 1 = \frac{6}{x-2}$$

$$2y = \frac{6}{x-2} - 1 = \frac{6-(x-2)}{x-2} = \frac{-x+8}{x-2}$$

$$y = \frac{-x+8}{2x-4}$$

Dus $g^{\text{inv}}(x) = \dfrac{-x+8}{2x-4}$.

f Los op $\sqrt[3]{2x-2} + 1 = x$

$$\sqrt[3]{2x-2} = x - 1$$
$$2x - 2 = (x-1)^3$$
$$2(x-1) = (x-1)^3$$
$$x - 1 = 0 \vee 2 = (x-1)^2$$
$$x = 1 \vee x - 1 = \sqrt{2} \vee x - 1 = -\sqrt{2}$$
$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ en $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$.

Alternatieve uitwerking

Voor f geldt $y = \sqrt[3]{2x-2} + 1$, dus voor f^{inv} geldt $x = \sqrt[3]{2y-2} + 1$

$$\sqrt[3]{2y-2} = x - 1$$
$$2y - 2 = (x-1)^3$$
$$2y = 2 + (x-1)^3$$
$$y = 1 + \tfrac{1}{2}(x-1)^3$$

Los op $\frac{1}{2}(x-1)^3 + 1 = \sqrt[3]{2x-2} + 1$

$$(x-1)^3 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-2}$$
$$(x-1)^9 = 8(2x-2)$$
$$(x-1)^9 = 16(x-1)$$
$$x - 1 = 0 \vee (x-1)^8 = 2^4$$
$$x = 1 \vee x - 1 = 2^{\frac{1}{2}} \vee x - 1 = -2^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ en $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

g $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{3x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}}{3+\frac{6}{x}}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y=\frac{2}{3}$.
$3x+6=0$ geeft $x=-2$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x=-2$,
dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f^{inv} is de lijn $y=-2$.
De gevraagde afstand is $\frac{2}{3}--2=2\frac{2}{3}$.

h Los op $\frac{5}{p(x-3)}+6=2x$

$$\frac{5}{p(x-3)}=2x-6$$
$$\frac{5}{p(x-3)}=2(x-3)$$
$$2p(x-3)^2=5$$
$$(x-3)^2=\frac{5}{2p}$$
$$x=3+\sqrt{\frac{5}{2p}}\vee x=3-\sqrt{\frac{5}{2p}}$$

Dus $x_A=3+\sqrt{\frac{5}{2p}}\vee x_A=3-\sqrt{\frac{5}{2p}}$.

$$\lim_{p\to\infty}\left(3+\sqrt{\frac{5}{2p}}\right)=3+0=3$$
$$\lim_{p\to\infty}\left(3-\sqrt{\frac{5}{2p}}\right)=3-0=3$$

Dus $\lim\limits_{p\to\infty}x_A=3$.

i De teller moet een factor $(2x-1)$ bevatten. De andere factor van de teller is dan $(2x-3)$, want $2x\cdot 2x=4x^2$ en $-1\cdot -3=3$.
Dus de teller is $(2x-1)(2x-3)=4x^2-6x-2x+3=4x^2-8x+3$.

Dus $f_{-8}(x)=\frac{4x^2-8x+3}{(x^2+4)(2x-1)}=\frac{(2x-1)(2x-3)}{(x^2+4)(2x-1)}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f_{-8}(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-3)(2x-1)}{(x^2+4)(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-3}{x^2+4}=\frac{1-3}{\frac{1}{4}+4}=-\frac{8}{17}$$

De coördinaten van de perforatie zijn $(\frac{1}{2},-\frac{8}{17})$.

j Voor $x<4$ is $|\frac{1}{4}x-1|=-\frac{1}{4}x+1$,

dus voor $x<4$ is $f(x)=(-\frac{1}{4}x+1)(\frac{1}{2}x+3)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+3$ en $f'(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$.

$$\lim_{x\uparrow 4}f'(x)=\lim_{x\uparrow 4}(-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{4})=-1-\tfrac{1}{4}=-1\tfrac{1}{4}$$

Bladzijde 152

11 **a** Voor f_c geldt $y=\frac{1}{c(x-1)}+1$, dus voor f_c^{inv} geldt $x=\frac{1}{c(y-1)}+1$

$$\frac{1}{c(y-1)}=x-1$$
$$c(y-1)=\frac{1}{x-1}$$
$$y-1=\frac{1}{c(x-1)}$$
$$y=\frac{1}{c(x-1)}+1=f_c(x)$$

b $f_c(1+p)+f_c(1-p)=\frac{1}{cp}+1-\frac{1}{cp}+1=2$

Dus $\frac{f_c(1+p)+f_c(1-p)}{2}=\frac{2}{2}=1$.

c Los op $\dfrac{1}{c(x-1)}+1=x$

$$\dfrac{1}{c(x-1)}=x-1$$
$$c(x-1)^2=1$$
$$(x-1)^2=\dfrac{1}{c}$$
$$x-1=\sqrt{\dfrac{1}{c}} \vee x-1=-\sqrt{\dfrac{1}{c}}$$
$$x=1+\sqrt{\dfrac{1}{c}} \vee x=1-\sqrt{\dfrac{1}{c}}$$

Dus $x_A=1-\sqrt{\dfrac{1}{c}}$.

$$\lim_{c\to\infty} x_A=\lim_{c\to\infty}\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{c}}\right)=1-0=1$$

A ligt op de lijn $y=x$, dus ook $\lim\limits_{c\to\infty} y_A=1$.

Dus het punt $S(1, 1)$ is het limietpunt van A.

12 **a** Voor f geldt $y=(x+1)^3-1$, dus voor f^{inv} geldt $x=(y+1)^3-1$

$$(y+1)^3=x+1$$
$$y+1=\sqrt[3]{x+1}$$
$$y=\sqrt[3]{x+1}-1$$

Dus g is de inverse van f.

b De grafieken van f en $g=f^{\text{inv}}$ snijden elkaar op de lijn $y=x$.
Dus los op $f(x)=x$.
Dit geeft $(x+1)^3-1=x$

$$(x+1)^3=x+1$$
$$x+1=0 \vee (x+1)^2=1$$
$$x=-1 \vee x+1=1 \vee x+1=-1$$
$$x=-1 \vee x=0 \vee x=-2$$

De gemeenschappelijke punten zijn $(-1, -1)$, $(0, 0)$ en $(-2, -2)$.

Bladzijde 153

13 Van de noemer is alleen 2 een nulpunt.
Voor een perforatie moet dus 2 ook een nulpunt van de teller zijn.
Dus $px^2+4px+6=(x-2)(px-3)$

$$px^2+4px+6=px^2-3x-2px+6$$
$$px^2+4px+6=px^2-(2p+3)x+6$$

Hieruit volgt $4p=-(2p+3)$

$$4p=-2p-3$$
$$6p=-3$$
$$p=-\tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}=\dfrac{-4}{5}=-\tfrac{4}{5}$$

Dus de perforatie is $(2, -\tfrac{4}{5})$.

14 De grafiek van f heeft de verticale asymptoot $x=1\tfrac{1}{2}$, dus ook de grafiek van g heeft de verticale asymptoot $x=1\tfrac{1}{2}$.
De grafiek van f heeft de horizontale asymptoot $y=0$, dus de grafiek van g heeft de horizontale asymptoot $y=a$.
Dus de verticale asymptoot van de inverse van g is de lijn $x=a$.
Dus $|a-1\tfrac{1}{2}|=4$

$$a-1\tfrac{1}{2}=4 \vee a-1\tfrac{1}{2}=-4$$
$$a=5\tfrac{1}{2} \vee a=-2\tfrac{1}{2}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

15 Stel de zijde van het vierkant is p.

Er geldt $f(1+p)=p$, dus $\frac{1}{1+p}=p$

$p(1+p)=1$

$p^2+p-1=0$

$D=1^2-4\cdot 1\cdot -1=5$

$p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee p=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

De lengte van de zijde is $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

16 $x_A=2$, dus $A(2, 1)$.

Voor $x<2$ geldt $f(x)=(-x+2)(\frac{1}{2}x+2)+1$

$=-\frac{1}{2}x^2-2x+x+4+1$

$=-\frac{1}{2}x^2-x+5$

Voor $x<2$ geldt $f'(x)=-x-1$.

l: $y=ax+b$ met $a=\lim\limits_{x\uparrow 2} f'(x)=\lim\limits_{x\uparrow 2}(-x-1)=-3$

$\left.\begin{array}{l} y=-3x+b \\ \text{door } A(2, 1)\end{array}\right\}$ $-3\cdot 2+b=1$

$-6+b=1$

$b=7$

Dus l: $y=-3x+7$.

16.3 Differentiaal- en integraalrekening

Bladzijde 154

17 **a** $f(x)=\frac{5x}{0{,}1x^4+3}$ geeft

$f'(x)=\frac{(0{,}1x^4+3)\cdot 5-5x\cdot 0{,}4x^3}{(0{,}1x^4+3)^2}=\frac{0{,}5x^4+15-2x^4}{(0{,}1x^4+3)^2}=\frac{-1{,}5x^4+15}{(0{,}1x^4+3)^2}$

$f'(x)=0$ geeft $-1{,}5x^4+15=0$

$x^4=10$

$x=\sqrt[4]{10}\ (x>0)$

Dus de functie is maximaal voor $x=\sqrt[4]{10}$.

b $H=\frac{2x}{(x^2+4)^{1\frac{1}{2}}}$ geeft

$\frac{dH}{dx}=\frac{(x^2+4)^{1\frac{1}{2}}\cdot 2-2x\cdot 1\frac{1}{2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+4)^3}=\frac{(x^2+4)\cdot 2-2x\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 2x}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}}$

$=\frac{2x^2+8-6x^2}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}}=\frac{8-4x^2}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}}$

$\frac{dH}{dx}=0$ geeft $8-4x^2=0$

$4x^2=8$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}\ (x>0)$

Dus H is maximaal voor $x=\sqrt{2}$.

c $b=OA+AB=OA+AD=a+f(a)=a+\frac{64}{3a\sqrt{a}}=a+\frac{64}{3}a^{-1\frac{1}{2}}$

$\frac{db}{da}=1-32a^{-2\frac{1}{2}}=1-\frac{32}{a^{2\frac{1}{2}}}$

$\frac{db}{da}=0$ geeft $1-\frac{32}{a^{2\frac{1}{2}}}=0$

$a^{2\frac{1}{2}}=32$

$a^{2\frac{1}{2}}=2^5$

$a=2^2=4$

$a=4$ geeft $b=4+\frac{64}{3\cdot 4\cdot 2}=6\frac{2}{3}$

De minimale waarde van b is $6\frac{2}{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f(0) = \dfrac{8}{1 + \sqrt{9}} = \dfrac{8}{4} = 2$ en $g(0) = 0 + 2 = 2$, dus $(0, 2)$ is snijpunt.

$f(x) = \dfrac{8}{1 + \sqrt{2x+9}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{2x+9}) \cdot 0 - 8 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+9}} \cdot 2}{(1 + \sqrt{2x+9})^2} = \frac{-8}{(1 + \sqrt{2x+9})^2 \cdot \sqrt{2x+9}}$$

$$f'(0) = \frac{-8}{(1 + \sqrt{9})^2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{-8}{16 \cdot 3} = -\tfrac{1}{6}$$

$g'(x) = 6$, dus $g'(0) = 6$.

Er geldt $f'(0) \cdot g'(0) = -\frac{1}{6} \cdot 6 = -1$, dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt $(0, 2)$.

e Voor raken moet gelden $f_p(x) = g(x) \wedge f_p'(x) = g'(x)$.
$f_p'(x) = g'(x)$ geeft $2x + p = 1$, dus $p = 1 - 2x$.
$p = 1 - 2x$ invullen bij $f_p(x) = g(x)$ geeft $x^2 + (1 - 2x) \cdot x + 2(1 - 2x) = x + 5$

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 2x^2 + 2 - 4x &= x + 5 \\
-x^2 - 4x - 3 &= 0 \\
x^2 + 4x + 3 &= 0 \\
(x + 1)(x + 3) &= 0 \\
x = -1 &\vee x = -3
\end{aligned}$$

$x = -1$ geeft $p = 1 - 2 \cdot -1 = 3$
$x = -3$ geeft $p = 1 - 2 \cdot -3 = 7$

18 **a** $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$
k: $y = ax + b$ met $a = f'(p) = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x + b \\ \text{door } P(p, p\sqrt{p}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot p + b = p\sqrt{p} \\ b = -\frac{1}{2}p\sqrt{p} \end{array}$$

Dus k: $y = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x - \frac{1}{2}p\sqrt{p}$.
k snijden met de x-as geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x = \frac{1}{2}p\sqrt{p}$
$x = \frac{1}{3}p$, dus $A(\frac{1}{3}p, 0)$.
Punt B is $(p, 0)$.

$$O(V) = \int_0^p x\sqrt{x}\,dx - O(\triangle ABP) = \int_0^p x^{1\frac{1}{2}}\,dx - O(\triangle ABP) = \left[\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^p - \tfrac{1}{2} \cdot (p - \tfrac{1}{3}p) \cdot p\sqrt{p}$$
$$= \tfrac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}p \cdot p\sqrt{p} = \tfrac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \tfrac{1}{3}p^2\sqrt{p} = \tfrac{1}{15}p^2\sqrt{p}$$

$\frac{1}{15}p^2\sqrt{p} = 4$
$p^2\sqrt{p} = 60$
$p^5 = 3600$
$p = \sqrt[5]{3600}$

Bladzijde 155

b
$$\begin{aligned}
I(L) &= \pi\int_0^1 \left(\frac{6}{2x-5}\right)^2 dx + \pi\int_1^3 (x-3)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^1 36(2x-5)^{-2}\,dx + \pi\int_1^3 (x-3)^2\,dx \\
&= \pi\left[36 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot -(2x-5)^{-1}\right]_0^1 + \pi\left[\tfrac{1}{3}(x-3)^3\right]_1^3 \\
&= \pi\left[\frac{-18}{2x-5}\right]_0^1 + \pi\left[\tfrac{1}{3}(x-3)^3\right]_1^3 \\
&= \pi(6 - 3\tfrac{3}{5}) + \pi(0 + 2\tfrac{2}{3}) = 5\tfrac{1}{15}\pi
\end{aligned}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $I(L) = \pi \int_1^b (\sqrt[4]{x})^2 \, dx = \pi \int_1^b x^{\frac{1}{2}} \, dx = \pi \left[\frac{2}{3} x^{1\frac{1}{2}}\right]_1^b = \pi \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x}\right]_1^b = \pi (\frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3})$

Los op $\frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3} = 17\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} b \sqrt{b} = 18$

$b \sqrt{b} = 27$

$b^{1\frac{1}{2}} = 3^3$

$b = 3^2 = 9$

d $I(L) = \pi \int_0^5 \left(0{,}05 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}6}{0{,}8 + 25x}}\right)^2 dx$

De optie integraal geeft $\pi \int_0^5 \left(0{,}05 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}6}{0{,}8 + 25x}}\right)^2 dx = 0{,}00502...$

Dus $I(L) \approx 0{,}0050$.

e $f(x) = 6$ geeft $x + \sqrt{x} = 6$

$\sqrt{x} = 6 - x$

$x = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$(x - 4)(x - 9) = 0$

$x = 4 \vee x = 9$

vold. niet

$I(L) = \pi \int_0^4 (6^2 - (x + \sqrt{x})^2) \, dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x\sqrt{x} - x) \, dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x^{1\frac{1}{2}} - x) \, dx$

$= \pi \left[36x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi(144 - 21\frac{1}{3} - 25\frac{3}{5} - 8) = 89\frac{1}{15}\pi$

f $I(B) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$, dus 10% hiervan is $3{,}6\pi$.

$I(L) = \pi \int_p^3 x^2 \, dy = \pi \int_p^3 (9 - y^2) \, dy = \pi \left[9y - \frac{1}{3}y^3\right]_p^3 = \pi(27 - 9 - 9p + \frac{1}{3}p^3) = \pi(\frac{1}{3}p^3 - 9p + 18)$

Los op $\frac{1}{3}p^3 - 9p + 18 = 3{,}6$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 18$ en $y_2 = 3{,}6$

De optie snijpunt geeft $x = 1{,}8251...$

Dus $p \approx 1{,}825$.

g $I(L) = \pi \int_1^p x^2 dy = \pi \int_1^p y \, dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^p = \pi(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2})$

$I(M) = \pi \int_1^p (y^2 - y) \, dy = \pi \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2\right]_1^p = \pi(\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2})$

Los op $\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}$ oftewel $p^2 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{2}{3}$.

Voer in $y_1 = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = \frac{2}{3}$.

De optie snijpunt geeft $x = 2{,}7320...$

Dus $p \approx 2{,}732$.

Bladzijde 160

19 **a** $a = 1$ geeft $b = 1 + 16 = 17$

$\text{inhoud} = \pi \cdot \int_1^{17} \left(16^2 - \left(\dfrac{16}{\sqrt{x}}\right)^2\right) dx = \pi \cdot \int_1^{17} \left(256 - \dfrac{256}{x}\right) dx = \pi \cdot \left[256x - 256 \ln |x|\right]_1^{17}$

$= \pi(256 \cdot 17 - 256 \ln(17) - (256 \cdot 1 - 256 \ln(1)) = \pi(4096 - 256 \ln(17))$

b $b = a + AB = a + AD = a + \dfrac{16}{\sqrt{a}} = a + 16a^{-\frac{1}{2}}$

$\dfrac{db}{da} = 1 - 8a^{-1\frac{1}{2}}$

$\dfrac{db}{da} = 0$ geeft $1 - 8a^{-1\frac{1}{2}} = 0$

$a^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

$a^{1\frac{1}{2}} = 8$

$a^3 = 64$

$a = 4$

$a = 4$ geeft $b = 4 + \dfrac{16}{\sqrt{4}} = 12$

Dus de minimale waarde van b is 12.

Bladzijde 161

20 $r_0 = 0{,}01$, $v_0 = 0{,}5$ en $g = 9{,}81$ geeft $r = 0{,}01 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}81x}}$

$I = \pi\displaystyle\int_0^{0,3} \left(0{,}01 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}81x}}\right)^2 dx$

De optie integraal geeft $\pi\displaystyle\int_0^{0,3} \left(0{,}01 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}81x}}\right)^2 dx = 3{,}165... \cdot 10^{-5}$.

Dus de inhoud is $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ m^3 = 32 cm^3.

Bladzijde 162

21 inhoud $= \pi\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{5}{4x-6}\right)^2 dx + \pi\int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\tfrac{1}{2})^2 dx = \pi\int_0^1 25(4x-6)^{-2} dx + \pi\int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\tfrac{1}{2})^2 dx$

$= \pi\left[25 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot -(4x-6)^{-1}\right]_0^1 + \pi\left[\tfrac{1}{3}(x - 3\tfrac{1}{2})^3\right]_1^{3\frac{1}{2}} = \pi\left[\dfrac{-25}{4(4x-6)}\right]_0^1 + \pi\left[\tfrac{1}{3}(x - 3\tfrac{1}{2})^3\right]_1^{3\frac{1}{2}}$

$= \pi\left(\dfrac{-25}{4 \cdot -2} - \dfrac{-25}{4 \cdot -6}\right) + \pi(0 - \tfrac{1}{3}(-2\tfrac{1}{2})^3) = \pi(\tfrac{25}{8} - \tfrac{25}{24}) + \pi \cdot \tfrac{125}{24} = 7\tfrac{7}{24}\pi$

Dus de inhoud van het omwentelingslichaam is $7\frac{7}{24}\pi$.

22 $f(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}} = 2(1 + \sqrt{x+1})^{-1}$ geeft

$f'(x) = -2(1 + \sqrt{x+1})^{-2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{-1}{(1 + \sqrt{x+1})^2 \cdot \sqrt{x+1}}$

$f'(0) = \dfrac{-1}{2^2 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$

$g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x} = 4x + 1$ voor $x \neq 0$

Dus k: $y = 4x + 1$.

$f'(0) \cdot \text{rc}_k = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$

Dus de lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht.

23 $\pi\displaystyle\int_{-1,5}^{p} x^2 dy = \pi\int_{-1,5}^{p} (2{,}25 - y^2) dy = \pi\left[2{,}25y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{-1,5}^{p} = \pi(2{,}25p - \tfrac{1}{3}p^3 - (2{,}25 \cdot -1{,}5 - \tfrac{1}{3} \cdot (-1{,}5)^3)$

$= \pi(2{,}25p - \tfrac{1}{3}p^3 + 2{,}25)$

Inhoud ijs is 92% van 14,137 geeft $\pi(2{,}25p - \frac{1}{3}p^3 + 2{,}25) = 0{,}92 \cdot 14{,}137$.

Voer in $y_1 = \pi(2{,}25x - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}25)$ en $y_2 = 0{,}92 \cdot 14{,}137$.

De optie snijpunt geeft $x = 0{,}978...$.

Dus de bol steekt ongeveer $1{,}5 - 0{,}98 = 0{,}52$ cm boven het water uit.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 163

24 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$, dus $f'(p) = 2p$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{raaklijn } k\text{: } y = 2px + b \\ \text{door } P(p, p^2)\end{array}\right\} \begin{array}{l} 2p \cdot p + b = p^2 \\ b = -p^2 \end{array}$$

Dus k: $y = 2px - p^2$.

k snijden met de x-as geeft $2px - p^2 = 0$

$$2px = p^2$$
$$x = \tfrac{1}{2}p$$

$O(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$

OP: $y = \dfrac{p^2}{p}x$, dus OP: $y = px$.

$$O(V) = \int_0^p (px - x^2)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}px^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^p = \tfrac{1}{2}p^3 - \tfrac{1}{3}p^3 = \tfrac{1}{6}p^3$$

$$\frac{O(\triangle OAP)}{O(V)} = \frac{\frac{1}{4}p^3}{\frac{1}{6}p^3} = 1\tfrac{1}{2}$$

25 **a** $f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - p}}$

Voor raken geldt $f_p(x) = x + \frac{1}{4} \wedge f_p'(x) = 1$

$$p + \sqrt{x - p} = x + \tfrac{1}{4} \wedge \frac{1}{2\sqrt{x - p}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Uit } \dfrac{1}{2\sqrt{x - p}} = 1 \text{ volgt } \sqrt{x - p} = \tfrac{1}{2} \\ p + \sqrt{x - p} = x + \tfrac{1}{4}\end{array}\right\} \begin{array}{l} p + \tfrac{1}{2} = x + \tfrac{1}{4} \\ x - p = \tfrac{1}{4}\end{array}$$

Ook uit $\sqrt{x - p} = \frac{1}{2}$ volgt $x - p = \frac{1}{4}$, dus de lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke $p \geq 1$.

b Het randpunt van de grafiek van f_p is (p, p).

$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p - 1)} = p - 1 + \sqrt{x - p + 1}$

$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - p + 1} = p - 1 + \sqrt{1} = p$

Dus het punt (p, p) ligt ook op de grafiek van f_{p-1}.

c l door $A(1, 1)$ en $B(2, 2)$, dus l: $y = x$.

$$O(V) = \int_1^2 (f_1(x) - x)\,dx = \int_1^2 (1 + \sqrt{x - 1} - x)\,dx = \int_1^2 (1 + (x - 1)^{\frac{1}{2}} - x)\,dx$$

$$= \left[x + \tfrac{2}{3}(x - 1)^{1\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= \left[x + \tfrac{2}{3}(x - 1)\sqrt{x - 1} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2 + \tfrac{2}{3} - 2 - (1 + 0 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6}$$

Bladzijde 164

26 $V = \pi\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi\int_a^b x\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b = \pi(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2) = \tfrac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$

$m = \frac{1}{2}(a + b)$

$A = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m = \pi \cdot \frac{1}{2}(a + b)$

$h \cdot A = (b - a) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}(a + b) = \pi \cdot \frac{1}{2}(b - a)(b + a) = \frac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$

Dus $V = h \cdot A$.

27 $A = \dfrac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$ geeft $\dfrac{dA}{dV} = \dfrac{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right) \cdot 432 - 432V \cdot \frac{8}{150^4} \cdot V^3}{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right)^2}$

$\dfrac{dA}{dV} = 0$ geeft $\dfrac{864}{150^4} \cdot V^4 + 432 - \dfrac{3456}{150^4} \cdot V^4 = 0$

$864V^4 + 432 \cdot 150^4 - 3456V^4 = 0$

$2592V^4 = 432 \cdot 150^4$

$V^4 = \dfrac{432 \cdot 150^4}{2592}$

$V \approx 95{,}8$

Bladzijde 165

28 Als V wentelt om de y-as ontstaat het lichaam K.
Als W wentelt om de y-as ontstaat het lichaam L.

$I(L) = \frac{1}{2} I(\text{bol}) = \frac{2}{3}\pi r^3$

$I(K) = \pi \int_0^r x^2 \, dy - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \int_0^r y \, dy - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \cdot \frac{1}{2}r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$I(L) = I(K)$ geeft $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2$

$\frac{4}{3} r = \frac{1}{2}$

$r = \frac{3}{8}$

16.4 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 166

29 **a** $50 + 415 \cdot \log(4x + 3) = 382$

$415 \cdot \log(4x + 3) = 332$

$\log(4x + 3) = 0{,}8$

$4x + 3 = 10^{0{,}8}$

$4x = -3 + 10^{0{,}8}$

$x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 10^{0{,}8}$

$x \approx 0{,}827$

b $\left.\begin{array}{l} x = 40 \text{ en } y = 27 \text{ geeft } 40 \cdot 27^b = c \\ x = 60 \text{ en } y = 10 \text{ geeft } 60 \cdot 10^b = c \end{array}\right\} 40 \cdot 27^b = 60 \cdot 10^b$

$\left(\frac{27}{10}\right)^b = 1\frac{1}{2}$

$b = {}^{2{,}7}\log(1{,}5) = 0{,}408...$

$c = 60 \cdot 10^{0{,}408...} = 153{,}5...$

Dus $b \approx 0{,}41$ en $c \approx 154$.

c $F = b \cdot e^{-\frac{5G}{H}}$, dus $e^{-\frac{5G}{H}} = \dfrac{F}{b}$

$-\dfrac{5G}{H} = \ln\left(\dfrac{F}{b}\right)$

$\dfrac{5G}{H} = -\ln\left(\dfrac{F}{b}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{F}\right)$

$G = 0{,}2H \cdot \ln\left(\dfrac{b}{F}\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^x = e^{-x}$

$\frac{1}{4}(e^x)^2 = 1$

$(e^x)^2 = 4$

$e^x = 2$

$x = \ln(2)$

$f(\ln(2)) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1$, dus $T(\ln(2), 1)$ en $p = \ln(2)$ en $q = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = a(x - (\ln(2))^2 + 1 \\ f(0) = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4}, \text{ dus } A(0, 1\frac{1}{4}) \end{array}\right\} a \cdot \ln^2(2) + 1 = 1\frac{1}{4}$$

$a \cdot \ln^2(2) = \frac{1}{4}$

$a = \dfrac{1}{4\ln^2(2)}$

e $f(x) = \ln(x^2 + x)$

$\downarrow$ translatie (3, 0)

$g(x) = \ln((x-3)^2 + x - 3) = \ln(x^2 - 6x + 9 + x - 3) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$f(x) = g(x)$ geeft $\ln(x^2 + x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$x^2 + x = x^2 - 5x + 6$

$6x = 6$

$x = 1$

Dus $x_A = 1$.

$f(x) = \ln(x^2 + x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$, dus $f'(1) = \frac{3}{2}$.

$g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot (2x - 5) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$, dus $g'(1) = -\frac{3}{2}$.

$f'(1) \cdot g'(1) = \frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} \neq -1$

Dus de grafieken snijden elkaar niet loodrecht in A.

f $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ en $g(0) = \ln(1) = 0$, dus de grafieken snijden elkaar in de oorsprong.

$f(x) = x\,e^{\frac{1}{2}x}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}x)\,e^{\frac{1}{2}x}$, dus $f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$.

$g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \ln(x+1)^{-1} = -\ln(x+1)$ geeft $g'(x) = -\dfrac{1}{x+1}$, dus $g'(0) = -\dfrac{1}{1} = -1$.

$f'(0) \cdot g'(0) = 1 \cdot -1 = -1$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht in de oorsprong.

g Voor f geldt $y = \ln(x\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(y\sqrt{y})$

$y\sqrt{y} = e^x$

$y^3 = e^{2x}$

$y = e^{\frac{2}{3}x}$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{\frac{2}{3}x}$

$\downarrow$ translatie (2, 1)

$g(x) = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1$

De lengte van AB is $L = g(p) - f(p) = e^{\frac{2}{3}(p-2)} + 1 - \ln(p\sqrt{p})$.

Voer in $y_1 = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1 - \ln(x\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 2{,}1020...$ en $y = 0{,}9560...$

De minimale lengte van het lijnstuk AB is ongeveer 0,956.

h $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$

$\ln(x\sqrt{x}) = 0$ geeft $x\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^{1\frac{1}{2}})}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} 1\tfrac{1}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$

De perforatie heeft de coördinaten $(1, 1\frac{1}{2})$.

30 **a** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = \dfrac{20 - 0}{0 - 10} = -2$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

Los op $f(x) = -2$, dus $\dfrac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = -2$

$$\begin{aligned} 20 - e^{4x} &= -2 \cdot e^{2x} + 20 \\ e^{4x} &= 2 \cdot e^{2x} \\ e^{2x} &= 2 \\ 2x &= \ln(2) \\ x &= \tfrac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Dus $x_A = \frac{1}{2}\ln(2)$.

b $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{f(p) - g(p)}{f(p)} = \dfrac{\ln(p) - (\ln(\sqrt[3]{p}) + 1)}{\ln(p)} = \dfrac{\ln(p) - \frac{1}{3}\ln(p) - 1}{\ln(p)} = \dfrac{\frac{2}{3}\ln(p) - 1}{\ln(p)} = \dfrac{2\ln(p) - 3}{3\ln(p)}$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{2\ln(p) - 3}{3\ln(p)} = \lim_{\ln(p) \to \infty} \frac{2\ln(p) - 3}{3\ln(p)} = \lim_{\ln(p) \to \infty} \frac{2 - \dfrac{3}{\ln(p)}}{3} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$$

Dus de grenswaarde van $\dfrac{BC}{BD}$ is $\frac{2}{3}$.

c $f(x) = 2^x + 2^{3-4x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{3-4x} \cdot \ln(2) \cdot -4$

$f'(x) = 0$ geeft $\ln(2)(2^x - 4 \cdot 2^{3-4x}) = 0$

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 2^{3-4x} \\ 2^x &= 2^2 \cdot 2^{3-4x} \\ 2^x &= 2^{5-4x} \\ x &= 5 - 4x \\ 5x &= 5 \\ x &= 1, \text{ dus } x_{\text{top}} = 1 \end{aligned}$$

$$O(V) = \int_0^1 (2^x + 2^{3-4x})\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{1}{-4} \cdot \frac{2^{3-4x}}{\ln(2)}\right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{2^{-1}}{4\ln(2)} - \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2^3}{4\ln(2)}\right)$$

$$= \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{8\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{2}{\ln(2)} = \frac{16 - 1 - 8 + 16}{8\ln(2)} = \frac{23}{8\ln(2)}$$

d $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ geeft $F'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} \cdot -1$

$$\begin{aligned} &= (2x + 1 - x^2 - x - 1)e^{-x} \\ &= (x - x^2)e^{-x} \end{aligned}$$

Dus $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ in een primitieve van $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$.

$f(x) = g(x)$ geeft $(x - x^2)e^{-x} = x^2 - x$

$$\begin{aligned} (x^2 - x) \cdot -e^{-x} &= (x^2 - x) \cdot 1 \\ x^2 - x = 0 &\vee -e^{-x} = 1 \\ x(x - 1) &= 0 \\ x = 0 &\vee x = 1 \end{aligned}$$

$$O(V) = \int_0^1 (x - x^2)e^{-x} - (x^2 - x))\,dx = \left[(x^2 + x + 1)e^{-x} - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 3e^{-1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - (e^0 - 0) = \frac{3}{e} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 1 = \frac{3}{e} - \tfrac{5}{6}$$

e $f(0) = \ln(0 + e) = 1$

$$\begin{aligned} y &= \ln(x^2 + e) \\ x^2 + e &= e^y \\ x^2 &= e^y - e \end{aligned}$$

$$I(L) = \pi\int_1^2 x^2\,dy = \pi\int_1^2 (e^y - e)\,dy = \pi\left[e^y - ey\right]_1^2 = \pi(e^2 - 2e - (e - e)) = \pi(e^2 - 2e)$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 173

31 **a** $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

$e^{\frac{1}{2}x} = 4e^{-\frac{1}{2}x}$

$e^x = 4$

$x = \ln(4)$

Dus $x_T = \ln(4)$.

b $e^x = 4$, dus $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{4} = 2$ en $e^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2}$.

$f(\ln(4)) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $T(\ln(4), 3\frac{1}{2})$.

$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1\frac{1}{2} = 4$, dus $A(0, 4)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = a(x-b)^2 + c \\ \text{top}\,(\ln(4), 3\frac{1}{2}) \end{array}\right\} y = a(x - \ln(4))^2 + 3\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = a(x-\ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} \\ \text{door}\,A(0, 4) \end{array}\right\} a(0 - \ln(4))^2 + 3\tfrac{1}{2} = 4$$

$a \cdot \ln^2(4) = \frac{1}{2}$

$a = \dfrac{1}{2\ln^2(4)}$

$y = \dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$

Los op $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right) = 1$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right)$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 5{,}1$.

32 **a** Voor f geldt $y = \ln(\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(\sqrt{y})$

$\sqrt{y} = e^x$

$y = (e^x)^2 = e^{2x}$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

b $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$l(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 0{,}2835...$ en $y = 1{,}5117...$

De gevraagde minimale lengte is 1,512.

c $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$

$\ln(\sqrt{x}) = 0$ geeft $\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Dus de perforatie is $(1, \frac{1}{2})$.

Bladzijde 174

33 **a** $AP = f(p) - 1 = \ln(p^2 + 1) - 1$ en

$BP = 1 - g(p) = 1 - \ln\left(\dfrac{e^2}{p^2 + 1}\right) = 1 - \ln(e^2) + \ln(p^2 + 1) = 1 - 2 + \ln(p^2 + 1) = \ln(p^2 + 1) - 1$

Dus $AP = BP$.

b $y = \ln(x^2 + 1)$

$x^2 + 1 = e^y$

$x^2 = e^y - 1$

inhoud $= 2 \cdot \pi \cdot \displaystyle\int_0^1 (e^y - 1)\,dy = 2\pi \cdot \left[e^y - y\right]_0^1 = 2\pi(e - 1 - (1 - 0)) = 2\pi(e - 2)$

c $y = \ln(x^2 + 1)$
$\downarrow$ translatie $(2, 0)$
$y = \ln((x-2)^2 + 1) = \ln(x^2 - 4x + 5)$
Voor het snijpunt geldt $\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 - 4x + 5)$
$$x^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$f'(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1$

De afgeleide van de verschoven grafiek voor $x = 1$ is $f'(1-2) = f'(-1) = \dfrac{-2}{1+1} = -1$.

$1 \cdot -1 = -1$, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

34 Voor raken geldt $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.
$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{2\text{e}} \cdot x^2$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{\text{e}} \cdot x$

$f'(x) = g'(x)$ geeft $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\text{e}} \cdot x$
$$x^2 = \text{e}$$
$$x = \sqrt{\text{e}} \vee x = -\sqrt{\text{e}}$$
$f(\sqrt{\text{e}}) = \ln(\sqrt{\text{e}}) = \frac{1}{2}$ en $g(\sqrt{\text{e}}) = \dfrac{1}{2\text{e}} \cdot \text{e} = \frac{1}{2}$
Dus de grafieken van f en g raken elkaar.

Bladzijde 175

35 **a** $T_{\text{nat}}'(t) = 1050 \cdot \text{e}^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9} \cdot \left(-2\ln(t) \cdot \dfrac{1}{t} + 6 \cdot \dfrac{1}{t}\right)$

$T_{\text{nat}}'(t) = 0$ geeft $\dfrac{-2\ln(t) + 6}{t} = 0$
$$\ln(t) = 3$$
De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \text{e}^{-9+18-9} = 20 + 1050 \cdot \text{e}^0 = 1070\,°\text{C}$.

b Los op $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$
$$345 \cdot \log(8t+1) = 280$$
$$\log(8t+1) = \tfrac{280}{345}$$
$$8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$$
$$8t = -1 + 10^{\frac{280}{345}}$$
$$t = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} \cdot 10^{\frac{280}{345}} \approx 0{,}685$$

c $O(\text{bij } T_{\text{lab}}) = \displaystyle\int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300)\,\text{d}t$

De optie integraal van de GR geeft $\displaystyle\int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300)\,\text{d}t \approx 11\,929$.

Oplossen van de vergelijking $T_{\text{nat}} = 300$ met de optie snijpunt van de GR geeft $t = 6{,}36...$ en $t = 63{,}41...$

Bereken $\displaystyle\int_{6,36...}^{30} (T_{\text{nat}} - 300)\,\text{d}t$.

De optie integraal van de GR geeft $\displaystyle\int_{6,36...}^{30} (T_{\text{nat}} - 300)\,\text{d}t \approx 14\,242$.

Omdat $14\,242 > 11\,929$ zal gelden $t_b < 30$, dus de deur houdt tijdens de natuurlijke brand geen 30 minuten stand.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 176

36 **a** $k = A \cdot e^{-\frac{E}{8{,}314T}}$

$e^{-\frac{E}{8{,}314T}} = \dfrac{k}{A}$

$-\dfrac{E}{8{,}314T} = \ln\left(\dfrac{k}{A}\right)$

$\dfrac{E}{8{,}314T} = -\ln\left(\dfrac{k}{A}\right) = \ln\left(\dfrac{k}{A}\right)^{-1} = \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$

Dus $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$.

b $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ en $T = 500$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{0{,}027}\right) = 4157 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{0{,}027}\right)$.

$k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ en $T = 550$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{0{,}24}\right) = 4572{,}7 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{0{,}24}\right)$.

Voer in $y_1 = 4157 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{0{,}027}\right)$ en $y_2 = 4572{,}7 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{0{,}24}\right)$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 7{,}4 \cdot 10^8$ en $y \approx 9{,}99 \cdot 10^4$.

Dus $E = 1{,}0 \cdot 10^5$.

37 **a** $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{-2x} \cdot \ln(2) \cdot -2$

$f'(x) = 0$ geeft $2^x \cdot \ln(2) = 2 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln(2)$

$2^x = 2^{-2x+1}$

$x = -2x + 1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

Bladzijde 177

b $O(V) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2^x + 2^{-2x})\,dx = \left[\dfrac{2^x}{\ln(2)} + \dfrac{1}{-2} \cdot \dfrac{2^{-2x}}{\ln(2)}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2^{-2}}{\ln(2)} - \left(\dfrac{2^{-1}}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2^2}{\ln(2)}\right)$

$= \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot (2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2) = \dfrac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)} = \dfrac{27}{8\ln(2)}$

$O(W) = 2k$, dus $2k = \dfrac{27}{8\ln(2)}$

$k = \dfrac{27}{16\ln(2)} \approx 2{,}43$

38 **a** $f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(ax) + x - x\ln\left(\dfrac{1}{a}x\right) = 2x - x\left(\ln(ax) + \ln\left(\dfrac{1}{a}x\right)\right)$

$= 2x - x\left(\ln\left(ax \cdot \dfrac{1}{a}x\right)\right) = 2x - x\ln(x^2) = 2x - 2x\ln(x)$

$\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - 2x\ln(x)}{2} = x - x\ln(x) = f_1(x)$

b $f_a(x) = 0$ geeft $x - x\ln(ax) = 0$

$x(1 - \ln(ax)) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad \ln(ax) = 1$

vold. niet $ax = e$, dus $x_S = \dfrac{e}{a}$

$f_a(x) = x - x\ln(ax)$ geeft $f_a'(x) = 1 - 1 \cdot \ln(ax) - x \cdot \dfrac{1}{ax} \cdot a = 1 - \ln(ax) - 1 = -\ln(ax)$

$f_a'(x) = 0$ geeft $-\ln(ax) = 0$

$ax = 1$, dus $x_T = \dfrac{1}{a}$

$\dfrac{x_S}{x_T} = \dfrac{\frac{e}{a}}{\frac{1}{a}} = e$, dus de verhouding is constant.

Bladzijde 178

39 **a** $8 - 4x = 0$ geeft $x = 2$, dus de x-coördinaat van de knik is 2.
Voor $x < 2$ is $f(x) = 4\,e^{2-x} + 8 - 4x$ en $f'(x) = 4\,e^{2-x} \cdot -1 - 4 = -4\,e^{2-x} - 4$.
Voor $x > 2$ is $f(x) = 4\,e^{2-x} - 8 + 4x$ en $f'(x) = -4\,e^{2-x} + 4$.
$rc_m = \lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x) = -4e^0 - 4 = -8$ en $rc_k = \lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x) = -4e^0 + 4 = 0$.

b $\lim\limits_{x \to \infty} 4\,e^{2-x} = 0$
De vergelijking van de asymptoot is $y = 4x - 8$.

40 **a** $g(x) = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
Los op $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$

$$\begin{aligned}(x-1)\ln(x) &= x - 1\\ x - 1 = 0 &\vee \ln(x) = 1\\ x = 1 &\vee x = e\end{aligned}$$

b Een primitieve van g is f.

$$\int_p^{2p} g(x)\,dx = \left[f(x)\right]_p^{2p} = f(2p) - f(p) = 2p\ln(2p) - 2p + 1 - (p\ln(p) - p + 1)$$
$$= 2p\ln(2p) - p\ln(p) - p$$

$$\int_p^{2p} g(x)\,dx = 0 \text{ geeft } 2p\ln(2p) - p\ln(p) - p = 0$$
$$p(2\ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$$
$$p = 0 \quad \vee \quad \ln(4p^2) - \ln(p) = 1$$
$$\text{vold. niet} \quad \ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) = 1$$
$$\ln(4p) = 1$$
$$4p = e$$
$$p = \tfrac{1}{4}e$$

Bladzijde 179

41 **a** $f_a'(x) = 0$ geeft $e^{ax} + ax\,e^{ax} = 0$

$$\begin{aligned}e^{ax}(1 + ax) &= 0\\ 1 + ax &= 0\\ a &= -\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{x}$ invullen bij de formule van f_a geeft
$y = x\,e^{-\frac{1}{x} \cdot x} = x\,e^{-1}$ oftewel $y = \frac{1}{e}x$, dus de top ligt op lijn l.

b $F_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{1}{a}x \cdot e^{ax} \cdot a - \frac{1}{a^2}\,e^{ax} \cdot a = \frac{1}{a}\,e^{ax} + x\,e^{ax} - \frac{1}{a}\,e^{ax} = x\,e^{ax} = f_a(x)$, dus F_a is een primitieve van f_a.

c $f_1(x) = \frac{1}{e}x$ geeft $x\,e^x = \frac{1}{e}x$

$$x = 0 \vee e^x = \frac{1}{e}$$
$$x = 0 \vee x = -1$$

$$O(V) = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{e}x - f_1(x)\right)dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 - F_1(x)\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{2e}x^2 - x\,e^x + e^x\right]_{-1}^{0} = 0 - 0 + 1 - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{5}{2e}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

42 $\left.\begin{array}{l} V = 20 \text{ en } T = 116 \text{ geeft } 20 \cdot 116^m = C \\ V = 30 \text{ en } T = 40 \text{ geeft } 30 \cdot 40^m = C \end{array}\right\} 20 \cdot 116^m = 30 \cdot 40^m$

$$\frac{116^m}{40^m} = \frac{30}{20}$$
$$\left(\frac{116}{40}\right)^m = 1{,}5$$
$$2{,}9^m = 1{,}5$$
$$m = {}^{2{,}9}\log(1{,}5) = 0{,}380...$$

$C = 20 \cdot 116^{0{,}380...} = 122{,}24...$
Dus $m \approx 0{,}38$ en $C \approx 122$.

Bladzijde 180

43 **a** $d = f_{0{,}7}(3) - f_{0{,}7}(0) = 5{,}920... - 1{,}428... = 4{,}491...$

Los op $\dfrac{8 \cdot 4{,}491...}{l^2 - 4 \cdot 4{,}491...^2} = 0{,}7$.

Invoeren van $y_1 = \dfrac{8 \cdot 4{,}491...}{x^2 - 4 \cdot 4{,}491...^2}$ en $y_2 = 0{,}7$ en de optie snijpunt geeft $x = 11{,}491...$

Dus $l \approx 11{,}49$.

b $l = 49{,}63$ en $d = 20{,}51$ geeft $k = \dfrac{8 \cdot 20{,}51}{49{,}63 - 4 \cdot 20{,}51^2} = 0{,}210...$, dus $\dfrac{1}{2k} \approx 2{,}38$.

$y_T = f_k(0) = \dfrac{1}{2k}(e^0 + e^0) = \dfrac{1}{2k}(1 + 1) = \dfrac{1}{k}$

$y = 2{,}38(e^{0{,}21x} + e^{-0{,}21x})$
$\downarrow$ spiegelen in de x-as
$y = -2{,}38(e^{0{,}21x} + e^{-0{,}21x})$
$\downarrow$ translatie $\left(0; 20{,}51 + \dfrac{1}{0{,}210...}\right)$ = translatie $(0; 25{,}66...)$
$h(x) = -2{,}38(e^{0{,}21x} + e^{-0{,}21x}) + 25{,}27$

Bladzijde 181

44 $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = \frac{0 - 1000}{0 - 10} = 100$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 100$.
$e^x - 10 = 0$ geeft $e^x = 10$, dus de lijn $x = \ln(10)$ is verticale asymptoot.
Dus $A(0, 100)$ en $B(\ln(10), 100)$.

Los op $\dfrac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = 100$
$$e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$$
$$e^{2x} - 100e^x = 0$$
$$e^x(e^x - 100) = 0$$
$$e^x = 100$$
Dus $x_C = \ln(100) = \ln(10^2) = 2\ln(10) = 2x_B$ en dus is B het midden van lijnstuk AC.

45 **a** Stel $x_A = p$.
Er geldt $q = f(p) = g(p + 3)$.
$f(p) = g(p + 3)$ geeft $\log(\sqrt{p}) = \log((p + 3)\sqrt{p + 3}) - 1$
Voer in $y_1 = \log(\sqrt{x})$ en $y_2 = \log((x + 3)\sqrt{x + 3}) - 1$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}389...$ en $y = -0{,}204...$ en ook $x = 4{,}864...$ en $y = 0{,}343...$
Dus $q \approx -0{,}20$ en $q \approx 0{,}34$.

b $CD = g(p) - f(p) = \log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p}) = \log\left(\dfrac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) - 1 = \log(p) - 1$

$CE = f(p) = \log(\sqrt{p}) = \log(p^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(p)$

$\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2}\log(p)} = \dfrac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$

c De grenswaarde is $\displaystyle\lim_{p \to \infty} \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \to \infty} \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \to \infty} \frac{2 - \dfrac{2}{\log(p)}}{1} = \frac{2 - 0}{1} = 2.$

16.5 Meetkunde

Bladzijde 182

46 **a** De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BD^2 + x^2 = (x+1)^2$

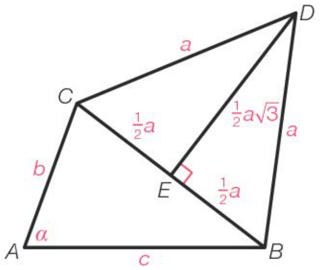
$$\begin{aligned} BD^2 &= x^2 + 2x + 1 - x^2 \\ BD^2 &= 2x + 1 \\ BD &= \sqrt{2x+1} \end{aligned}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + x^2 = (x+3)^2$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2x+1} + 4)^2 + x^2 = x^2 + 6x + 9 \\ &2x + 1 + 8\sqrt{2x+1} + 16 = 6x + 9 \\ &8\sqrt{2x+1} = 4x - 8 \\ &2\sqrt{2x+1} = x - 2 \\ &4(2x+1) = (x-2)^2 \\ &8x + 4 = x^2 - 4x + 4 \\ &x^2 - 12x = 0 \\ &x(x-12) = 0 \\ &x = 0 \vee x = 12 \end{aligned}$$

Dus $BC = 12$.

b De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.



$O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha))$

c De cosinusregel geeft $(x+5)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos(\angle A)$

$$\begin{aligned} &x^2 + 10x + 25 = x^2 + 100 - 20x\cos(\angle A) \\ &20x\cos(\angle A) = 75 - 10x \\ &\cos(\angle A) = \frac{75 - 10x}{20x} = \frac{15 - 2x}{4x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{15 - 2x}{4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{15}{x} - 2}{4} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\cos(\angle A) = -\frac{1}{2}$ geeft $\angle A = 120°$, dus de gevraagde limiet is 120°.

d $c: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

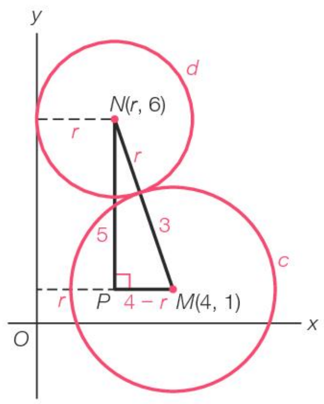
$$\begin{aligned} &x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8 = 0 \\ &(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 8 = 0 \\ &(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{aligned}$$

Dus $M(4, 1)$ en $r_c = 3$.

Stel $r_d = r$, dan is $MN = r + 3$, $PM = 4 - r$ en $NP = 6 - 1 = 5$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MNP$ geeft $(4-r)^2 + 5^2 = (r+3)^2$

$$\begin{aligned} &16 - 8r + r^2 + 25 = r^2 + 6r + 9 \\ &-14r = -32 \\ &r = \tfrac{32}{14} = 2\tfrac{2}{7} \end{aligned}$$



© Noordhoff Uitgevers bv

e $\left.\begin{array}{l} x^2 + (y-1)^2 = 7 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y + (y-1)^2 = 7 \\ y + y^2 - 2y + 1 - 7 = 0 \\ y^2 - y - 6 = 0 \\ (y+2)(y-3) = 0 \\ y = -2 \vee y = 3 \\ \text{vold. niet} \end{array}$

$y = 3$ geeft $x^2 = 3$, dus $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$.
De snijpunten zijn $(\sqrt{3}, 3)$ en $(-\sqrt{3}, 3)$.

f m is de middelloodlijn van het lijnstuk AB.

$\text{rc}_{AB} = \frac{-2 - -1}{4 - -1} = -\frac{1}{5}$, dus $\text{rc}_m = 5$.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } y = 5x + b \\ \text{midden van } AB \text{ is } (1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 1\frac{1}{2} + b = -1\frac{1}{2} \\ b = -9 \end{array}$

m: $y = 5x - 9$ snijden met c geeft $x^2 + (5x-9)^2 - 4x - 2(5x-9) - 8 = 0$

$$x^2 + 25x^2 - 90x + 81 - 4x - 10x + 18 - 8 = 0$$
$$26x^2 - 104x + 91 = 0$$
$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 8$$
$$x = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{4} = 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Bladzijde 186

47 **a** $\text{rc}_{AB} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_{AC} = -2$.

AC: $y = -2x + b$ door $A(4, 0)$ geeft AC: $y = -2x + 8$.
$y = -2x + 8$ snijden met $x^2 + (y-3)^2 = 25$ geeft $x^2 + (-2x+5)^2 = 25$

$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 25$$
$$5x^2 - 20x = 0$$
$$5x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus $C(0, 8)$.
In het geval je bent uitgegaan van $\angle B = 90°$, dan krijg je $C(-4, 6)$.

b C is het snijpunt van de cirkel c met de cirkel d met middelpunt A en straal AB.

$\left.\begin{array}{l} d\text{: } (x-4)^2 + y^2 = r^2 \\ \text{door } B(0, -2) \end{array}\right\} r^2 = (0-4)^2 + (-2)^2 = 20$

Dus d: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20$ oftewel d: $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$.

c: $x^2 + (y-3)^2 = 25$
$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$
$x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$

d snijden met c geeft $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \end{array}\right.$ $-$

$$-8x + 6y + 12 = 0$$
$$6y = 8x - 12$$
$$y = \tfrac{4}{3}x - 2$$

$y = \frac{4}{3}x - 2$ snijden met d geeft $x^2 + (\frac{4}{3}x - 2)^2 - 8x - 4 = 0$

$$x^2 + \tfrac{16}{9}x^2 - \tfrac{16}{3}x + 4 - 8x - 4 = 0$$
$$\tfrac{25}{9}x^2 - \tfrac{40}{3}x = 0$$
$$x(\tfrac{25}{9}x - \tfrac{40}{3}) = 0$$
$$x = 0 \vee x = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{25}{9}} = \frac{24}{5}$$

$x = \frac{24}{5}$ geeft $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{5} - 2 = 4\frac{2}{5}$

Dus $C(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5})$.

Bladzijde 187

48 $\alpha + \beta + 2 \cdot 90° = 360°$ (volle hoek), dus $\beta = 180° - \alpha$.
De oppervlakte van de lichte delen is $p^2 + q^2$.
De cosinusregel in de driehoek met hoek α geeft
$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(\alpha)$.
De cosinusregel in de driehoek met hoek β geeft
$s^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(\beta) = p^2 + q^2 - 2pq\cos(180° - \alpha) = p^2 + q^2 + 2pq\cos(\alpha)$.
Hieruit volgt $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 2pq\cos(\alpha)) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 2pq\cos(\alpha)) = p^2 + q^2$.
Dus de oppervlakte van de donkere delen is gelijk aan de oppervlakte van de lichte delen.

Bladzijde 188

49 **a** In $\triangle ADN$ is $AD^2 + DN^2 = r^2$.
In $\triangle ADM$ is $AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2$.

$$\begin{cases} AD^2 + DN^2 = r^2 \\ AD^2 + (DN-1)^2 = 1^2 \end{cases} \; -$$

$$\begin{aligned} DN^2 - (DN-1)^2 &= r^2 - 1 \\ DN^2 - (DN^2 - 2DN + 1) &= r^2 - 1 \\ DN^2 - DN^2 + 2DN - 1 &= r^2 - 1 \\ 2DN &= r^2 \\ DN &= \tfrac{1}{2}r^2 \end{aligned}$$

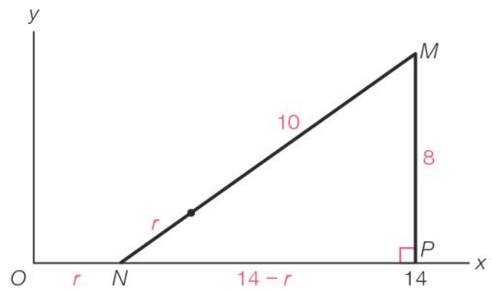
b $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$
$CD = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}(r - 1)$
$DM = CD$ geeft $\frac{1}{2}r^2 - 1 = \frac{1}{2}(r - 1)$

$$\begin{aligned} & r^2 - 2 = r - 1 \\ & r^2 - r - 1 = 0 \\ & D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5 \\ & r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ & r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$

Dus $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

50 Stel de straal van d is gelijk aan r.
Zie de figuur hiernaast.
In $\triangle NPM$ is $(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$

$$\begin{aligned} & 196 - 28r + r^2 + 64 = r^2 + 20r + 100 \\ & -48r = -160 \\ & r = 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$



© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 189

51 **a** In $\triangle M_1M_2M_3$ geeft de cosinusregel
$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
$r^2 + 4r + 4 = 64 + r^2 + 12r + 36 - (16r+96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
$(16r+96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3) = 8r + 96$
$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{8r+96}{16r+96} = \dfrac{8(r+12)}{8(2r+12)} = \dfrac{r+12}{2r+12}$

b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{r+12}{2r+12} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{12}{r}}{2+\dfrac{12}{r}} = \dfrac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

Dus $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\angle M_1M_2M_3 = 60°$.

c Stel $M_1P = p$.
In $\triangle PM_1M_3$ is $r^2 + p^2 = (r+2)^2$
$r^2 + p^2 = r^2 + 4r + 4$
$p^2 = 4r + 4$ ... (1)
In $\triangle PM_2M_3$ is $r^2 + (p+8)^2 = (r+6)^2$
$r^2 + p^2 + 16p + 64 = r^2 + 12r + 36$
$p^2 = 12r - 16p - 28$ ... (2)
Uit (1) en (2) volgt $4r + 4 = 12r - 16p - 28$
$16p = 8r - 32$
$p = \frac{1}{2}r - 2$ ... (3)
Uit (1) en (3) volgt $(\frac{1}{2}r - 2)^2 = 4r + 4$
$\frac{1}{4}r^2 - 2r + 4 = 4r + 4$
$\frac{1}{4}r^2 - 6r = 0$
$\frac{1}{4}r(r - 24) = 0$
$r = 0 \vee r = 24$
vold. niet
Dus $r = 24$.

Bladzijde 190

52 Snijden van de cirkel $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ met de parabool $y = x^2$ geeft $y + (y-r)^2 = r^2$
$y + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$
$y^2 + (1-2r)y = 0$
$y(y + 1 - 2r) = 0$
$y = 0 \vee y = 2r - 1$
Omdat $y = x^2$ is $x^2 = 2r - 1$ en deze vergelijking moet twee oplossingen hebben.
Dus $2r - 1 > 0$ oftewel $r > \frac{1}{2}$.

53 $P(p, p(p-3)^2 + 2)$ en $A(7, 0)$ geeft $AP = \sqrt{(p-7)^2 + (p(p-3)^2+2)^2}$
Voer in $y_1 = \sqrt{(x-7)^2 + (x(x-3)^2+2)^2}$.
De optie minimum geeft $y = 4{,}349...$
Dus de minimale lengte is 4,35.

16.6 Vectoren en bewegingsvergelijkingen

Bladzijde 191

54 **a** $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$
Dus $M(3, 2)$ en $r = 5$.

$y = 6$ geeft $(x-3)^2 + 16 = 25$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 9 \\ x-3 = 3 &\vee x-3 = -3 \\ x = 6 &\vee x = 0 \end{aligned}$$

Dus $A(0, 6)$ en $B(6, 6)$.

$y = -1$ geeft $(x-3)^2 + 9 = 25$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 16 \\ x-3 = 4 &\vee x-3 = -4 \\ x = 7 &\vee x = -1 \end{aligned}$$

Dus $C(-1, -1)$ en $D(7, -1)$.

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle BMC) = \cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-12-12}{5 \cdot 5} = -\tfrac{24}{25},$$

dus $\angle BMC \approx 163{,}7°$.

b $P(2-t, \frac{1}{2} + 3t)$

$AP^2 = (2-t)^2 + (3t - \frac{1}{2})^2 = 4 - 4t + t^2 + 9t^2 - 3t + \frac{1}{4} = 10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4}$

$BP^2 = (-t-2)^2 + (3t - 2\frac{1}{2})^2 = t^2 + 4t + 4 + 9t^2 - 15t + 6\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$

$AP^2 = BP^2$ geeft $10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} 4t &= 6 \\ t &= 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$t = 1\frac{1}{2}$ geeft $P(\frac{1}{2}, 5)$

c $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(p, \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1)$ op de grafiek van f.

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix}$

Er moet gelden $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 4(p-1) + \tfrac{1}{4}p^2 - 1\tfrac{1}{4}p + 1 &= 0 \\ 4p - 4 + \tfrac{1}{4}p^2 - 1\tfrac{1}{4}p + 1 &= 0 \\ \tfrac{1}{4}p^2 + 2\tfrac{3}{4}p - 3 &= 0 \\ p^2 + 11p - 12 &= 0 \\ (p-1)(p+12) &= 0 \\ p = 1 &\vee p = -12 \end{aligned}$$

$p = 1$ geeft $A(1, 0)$ en $p = -12$ geeft $P(-12, 52)$.

d $P(1 + 2t, 1 + t)$

$d(P, x\text{-as}) = |1 + t|$

$$d(P, k) = \frac{|3(1+2t) + 4(1+t) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 6t + 4 + 4t - 12|}{5} = \frac{|10t - 5|}{5} = |2t - 1|$$

$d(P, x\text{-as}) = d(P, k)$ geeft $|1 + t| = |2t - 1|$

$$\begin{aligned} 1 + t = 2t - 1 &\vee 1 + t = -2t + 1 \\ -t = -2 &\vee 3t = 0 \\ t = 2 &\vee t = 0 \end{aligned}$$

$t = 2$ geeft straal $= 3$ en $t = 0$ geeft straal $= 1$.

e Lijn l door $A(-1, 1)$ loodrecht op k: $4x + 3y = 12$.

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x - 4y = c \\ \text{door } A(-1, 1) \end{array}\right\} c = -3 - 4 = -7$$

Dus l: $3x - 4y = -7$.

© Noordhoff Uitgevers bv

k snijden met l geeft het punt P.

$$\begin{cases}4x+3y=12 & |4| \\ 3x-4y=-7 & |3|\end{cases} \text{ geeft } \begin{cases}16x+12y=48 \\ 9x-12y=-21\end{cases} +$$

$$25x=27$$

$$x=\tfrac{27}{25}$$

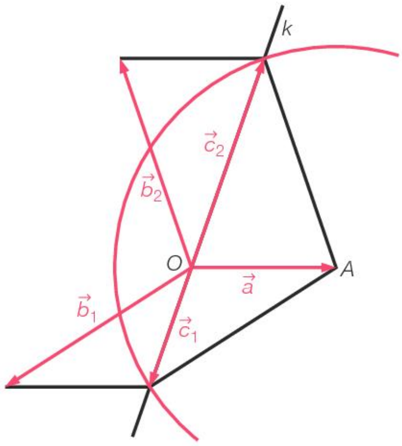
$x=\frac{27}{25}$ en $4x+3y=12$ geeft $4\cdot\frac{27}{25}+3y=12$

$$3y=\tfrac{192}{25}$$

$$y=\tfrac{64}{25}$$

Dus $P(1\frac{2}{25}, 2\frac{14}{25})$.

f Cirkel met middelpunt A en straal 5.
Dit geeft de vectoren $\vec{c}_1$ en $\vec{c}_2$ op k.
Met de parallellogramconstructie vind je $\vec{b}_1$ en $\vec{b}_2$.
Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 192

55 **a** $a\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$ geeft $a^2x=\frac{1}{4}x^2$

$$x=0 \vee \tfrac{1}{4}x=a^2$$

$$x=0 \vee x=4a^2$$

Dus $S(4a^2, 2a^2)$.

$\overrightarrow{SO}=\begin{pmatrix}-4a^2\\-2a^2\end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SO}_{\text{L}}=\begin{pmatrix}2a^2\\-4a^2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix}4a^2\\2a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a^2\\-4a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6a^2\\-2a^2\end{pmatrix}$, dus $P(6a^2, -2a^2)$.

b Stel $y_P=p$, dan is $x_P=3p-3$ en $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3p-3\\p\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}_{\text{R}}=\begin{pmatrix}p\\-3p+3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}3p-3\\p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\-3p+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4p-3\\-2p+3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x=4p-3 & |1| \\ y=-2p+3 & |2|\end{cases} \text{ geeft } \begin{cases}x=4p-3 \\ 2y=-4p+6\end{cases} +$$

$$x+2y=3$$

Dus l: $x+2y=3$.

c $x(t)=\frac{1}{2}t^2+2t-3$ geeft $x'(t)=t+2$

$y(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+3$ geeft $y'(t)=t-2$

$v(t)=\sqrt{(t+2)^2+(t-2)^2}=\sqrt{t^2+4t+4+t^2-4t+4}=\sqrt{2t^2+8}$

De minimale snelheid is $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ voor $t=0$.

d $x(t)=0$ geeft $t^2-4=0$, dus $t=2 \vee t=-2$.

$t=-2$ geeft het punt $A(0, 16)$.

$x(t)=t^2-4$ geeft $x'(t)=2t$, dus $x'(-2)=-4$.

$y(t)=(t-2)^2$ geeft $y'(t)=2(t-2)$, dus $y'(-2)=-8$.

De gevraagde snelheid is $v(-2)=\sqrt{(x'(-2))^2+(y'(-2))^2}=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

e $P(1 + 3t, 5 + t)$, dus $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 5+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix}$.

$AP \perp l$, dus $\begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$3(3t-5) + t + 5 = 0$$
$$9t - 15 + t + 5 = 0$$
$$10t = 10$$
$$t = 1$$

$t = 1$ geeft $P(4, 6)$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\cos(\angle ABP) = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{6-2}{\sqrt{65}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$, dus $\angle ABP \approx 60{,}3°$.

Bladzijde 196

56 **a** $y = ax$ substitueren in $(x-1)^2 + y^2 = 1$ geeft $(x-1)^2 + (ax)^2 = 1$

$$x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 = 1$$
$$(a^2+1)x^2 = 2x$$
$$x = 0 \vee (a^2+1)x = 2$$
$$x = 0 \vee x = \frac{2}{a^2+1}$$

Dus $S\left(\dfrac{2}{a^2+1}, \dfrac{2a}{a^2+1}\right)$ en $\overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{a^2+1} \\ -\dfrac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SO}_L = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{a^2+1} \\ \dfrac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{a^2+1} \\ \dfrac{-2}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a+2}{a^2+1} \\ \dfrac{2a-2}{a^2+1} \end{pmatrix}$

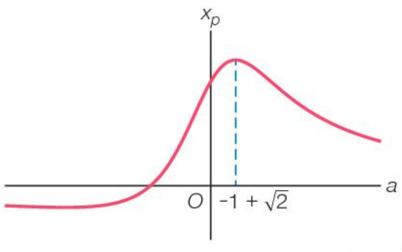
Dus $x_P = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_P = \dfrac{2a-2}{a^2+1}$.

b De cirkel gaat door $O(0, 0)$ en heeft dus een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$.
$a = 1$ geeft $P(2, 0)$ en dit geeft $4 + 0 + 2m + 0 = 0$, dus $m = -2$.
$a = -1$ geeft $P(0, -2)$ en dit geeft $0 + 4 + 0 - 2n + 0$, dus $n = 2$.
Dus $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

c $x_P = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ geeft $x_P{}' = \dfrac{(a^2+1) \cdot 2 - (2a+2) \cdot 2a}{(a^2+1)^2} = \dfrac{2a^2 + 2 - 4a^2 - 4a}{(a^2+1)^2} = \dfrac{-2a^2 - 4a + 2}{(a^2+1)^2}$

$x_P{}' = 0$ geeft $-2a^2 - 4a + 2 = 0$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$
$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$$
$$a = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} \vee a = -1 - \sqrt{2}$$



Dus x_P is maximaal voor $a = -1 + \sqrt{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

57 $P(p, 2^p + 2^{-2p})$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ 2^p + 2^{-2p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\frac{1}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$, dus $\begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix} = 0$

$p - 1 + 1\frac{13}{16}(2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4}) = 0$

Voer in $y_1 = x - 1 + 1\frac{13}{16}(2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4})$ en gebruik de optie nulpunt.
Je krijgt $x = -0{,}674...$, dus de x-coördinaat van P is ongeveer $-0{,}67$.

Bladzijde 197

58 **a** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus een normaalvector van de middelloodlijn van AB is $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Het midden van AB is $(3, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} 3x - y = c \\ \text{door } (3, 1) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$3x - y = 8$ snijden met k geeft $3(2 + 4t) - (1 + 5t) = 8$

$6 + 12t - 1 - 5t = 8$

$7t = 3$

$t = \frac{3}{7}$

$t = \frac{3}{7}$ geeft $P(2 + \frac{3}{7} \cdot 4,\ 1 + \frac{3}{7} \cdot 5) = P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$

b $P(2 + 4t, 1 + 5t)$

$d(P, y\text{-as}) = 2 + 4t$

$\text{rc}_m = \dfrac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$ en m door $A(0, 2)$, dus m: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ oftewel m: $x + 3y = 6$.

$d(P, m) = \dfrac{|2 + 4t + 3(1 + 5t) - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \dfrac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$

Voer in $y_1 = 2 + 4x$ en $y_2 = \dfrac{|19x - 1|}{\sqrt{10}}$.

De optie snijpunt geeft $x = -0{,}168...$ en $x = 1{,}153...$
Invullen in $2 + 4t$ geeft $1{,}327...$ en $6{,}613...$
Dus de stralen zijn 1,33 en 6,61.

59 $P(p, -\frac{1}{2}p + 3)$ geeft $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}_L = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}p - 3 \\ \frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}p - 3 \\ y = \frac{1}{2}p + 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}p - 3 \\ 3y = 1\frac{1}{2}p + 9 \end{cases}$ $-$

$x - 3y = -12$

$-3y = -x - 12$

$y = \frac{1}{3}x + 4$

Dus m: $y = \frac{1}{3}x + 4$.

60 c: $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 100$

c snijden met de x-as geeft $(x - 14)^2 + (-8)^2 = 100$

$(x - 14)^2 = 36$

$x - 14 = 6 \vee x - 14 = -6$

$x = 20 \vee x = 8$

Dus $A(8, 0)$ en $B(20, 0)$.

$\vec{z} = \dfrac{1}{3 + 1 + 2} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Dus $Z(12, 2\frac{2}{3})$.

Bladzijde 198

61 **a** $x(t) = 3t^2 + t + 1$ geeft $x'(t) = 6t + 1$
$y(t) = 3t^2 - t + 1$ geeft $y'(t) = 6t - 1$
$v(t) = \sqrt{(6t+1)^2 + (6t-1)^2} = \sqrt{36t^2 + 12t + 1 + 36t^2 - 12t + 1} = \sqrt{72t^2 + 2}$
De minimale snelheid is $\sqrt{2}$ voor $t = 0$.

b De vergelijking $y(t) = 0$ heeft één oplossing,
dus de discriminant van $at^2 - t + 1 = 0$ is gelijk aan nul.
$D = 1 - 4a$
$D = 0$ geeft $1 - 4a = 0$, dus $a = \frac{1}{4}$.

62 **a** $x(t) = 0$ geeft $1 - t^2 = 0$, dus $t = 1 \vee t = -1$.
$t = -1$ geeft $O(0, 0)$ en $t = 1$ geeft $A(0, 4)$.
$x'(t) = -2t$ en $y'(t) = 2(1 + t)$
$x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$
De gevraagde snelheid is $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b $x + y = 1 - t^2 + (1+t)^2 = 1 - t^2 + 1 + 2t + t^2 = 2 + 2t = 2(1 + t)$
$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^2 = (2(1+t))^2 = 4(1+t)^2 \\ y = (1+t)^2\end{array}\right\} (x+y)^2 = 4y$$

Bladzijde 199

63 **a** $\angle CBP = 90°$, dus B op de cirkel met middellijn CP.
Dus middelpunt $M(\frac{1}{2}(-4+2), \frac{1}{2}(-4+3)) = M(-1, -\frac{1}{2})$ en
$MP^2 = (2 - -1)^2 + (3 - -\frac{1}{2})^2 = 9 + 12\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$.
Dit geeft van de cirkel de vergelijking $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$.

b $D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ geeft $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$

$DP\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$

$Q(4 - 2t, -8 + 11t)$ en $C(-4, -4)$ geeft $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix}4-2t\\-8+11t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-2t\\-4+11t\end{pmatrix}$

$CQ \perp DP$ geeft $\begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8-2t\\-4+11t\end{pmatrix} = 0$
$-2(8 - 2t) + 11(-4 + 11t) = 0$
$-16 + 4t - 44 + 121t = 0$
$125t = 60$
$t = \frac{12}{25}$

$t = \frac{12}{25}$ geeft $Q(4 - \frac{24}{25}, -8 + \frac{132}{25})$ oftewel $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$.

c Noem de bij zijde CD horende hoogte h.
$$\left.\begin{array}{l}O(ABCD) = CD \cdot DA \\ O(\triangle CDQ) = \frac{1}{2}CD \cdot h \\ O(\triangle CDQ) = \frac{1}{3}O(ABCD)\end{array}\right\} h = \frac{2}{3} \cdot DA$$
Dus $DQ = \frac{2}{3} \cdot DP$.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Dus $Q(2\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

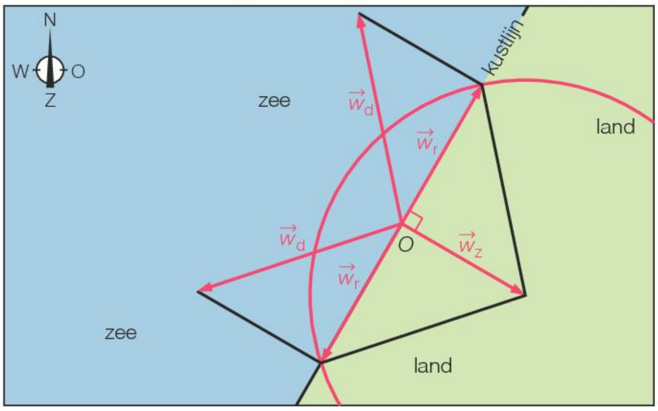
64
$$\left.\begin{array}{l}c\colon (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25 \\ x = t \text{ en } y = 2t\end{array}\right\} (t-1)^2 + (2t-7)^2 = 25$$
$t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25$
$5t^2 - 30t + 25 = 0$
$t^2 - 6t + 5 = 0$
$(t-1)(t-5) = 0$
$t = 1 \vee t = 5$

De snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 10)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

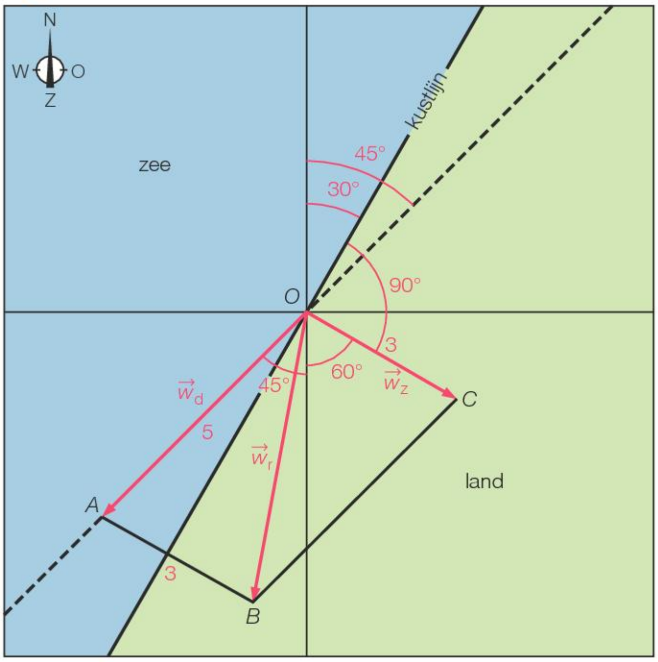
Bladzijde 200

65 **a** Teken de cirkel met middelpunt het eindpunt van $\vec{w}_z$ en straal 6.
De snijpunten van de cirkel en de kustlijn zijn de eindpunten van de vectoren $\vec{w}_r$.
Teken parallellogrammen met zijde $\vec{w}_z$ waarvan de vectoren $\vec{w}_r$ diagonalen zijn.
Teken de vectoren $\vec{w}_d$, zie de figuur.



Bladzijde 201

b



$\angle AOC = 60° + 45° = 105°$, dus $\angle OAB = 180° - 105° = 75°$.
De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos(\angle OAB)$

$$OB^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(75°)$$
$$OB^2 = 26{,}23...$$
$$OB = 5{,}12...$$

Dus de gevraagde snelheid is 5,1 m/s.

Bladzijde 202

66 **a** Het midden van CS is $(\frac{1}{2}(0+2), \frac{1}{2}(4+2)) = (1, 3)$.
c: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$ door $A(4, 0)$ geeft
$r^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$, dus c: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
AC: $y = -x + 4$ snijden met c geeft $(x-3)^2 + (-x+2)^2 = 5$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 5$$
$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-1)(x-4) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 4$$

$x_F = 1$ geeft $y_F = -1 + 4 = 3$, dus $F(1, 3)$.
Dus F is het midden van CS.

b $\overrightarrow{MF} = \vec{f} - \vec{m} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MB} = \vec{b} - \vec{m} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$, dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90°$.

$\overrightarrow{MG} = \vec{g} - \vec{m} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA} = \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$, dus $\angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90°$.

$\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90° + 90° = 180°$

Dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

67 **a** Als P op k ligt, vormen A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek.

$k\colon \frac{x}{40} + \frac{y}{10} = 1$ oftewel $x + 4y = 40$

k snijden met m geeft $18 + 5t + 4(30 - 3t) = 40$

$18 + 5t + 120 - 12t = 40$

$-7t = -98$

$t = 14$

Dus $P(88, -12)$.

b $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix}18+5t\\30-3t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18+5t\\20-3t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix}18+5t\\30-3t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22+5t\\30-3t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ geeft $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

$\begin{pmatrix}18+5t\\20-3t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-22+5t\\30-3t\end{pmatrix} = 0$

$(18 + 5t)(-22 + 5t) + (20 - 3t)(30 - 3t) = 0$

$-396 + 90t - 110t + 25t^2 + 600 - 60t - 90t + 9t^2 = 0$

$34t^2 - 170t + 204 = 0$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$(t - 2)(t - 3) = 0$

$t = 2 \vee t = 3$

$t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $AP = \sqrt{980}$ en $BP = \sqrt{720}$, dus $AP \neq BP$.

$t = 3$ geeft $P(33, 21)$ en $AP = \sqrt{1210}$ en $BP = \sqrt{490}$, dus $AP \neq BP$.

Dus driehoek ABP is niet gelijkbenig, dus zo'n positie is er niet.

16.7 Goniometrie

Bladzijde 203

68 **a** $\cos^2(x) + 1\frac{1}{4} = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$

$1 - \sin^2(x) + 1\frac{1}{4} = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$

$\sin^2(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x) - 2\frac{1}{4} = 0$

Stel $\sin(x) = u$.

$u^2 + \sqrt{3} \cdot u - 2\frac{1}{4} = 0$

$D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2\frac{1}{4} = 12$

$u = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee u = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

b De omtrek, dus ook de straal, van c is drie keer zo groot als de straal van de eenheidscirkel.
Dus $r = 3$, $M(4, 0)$ en $a = 4$.
De amplitude is 3, dus $b = 3$.
De omlooptijd is 30 seconden, dus $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.
Q gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$, dus $d = 7\frac{1}{2}$.

c
$$N = \frac{\sin(t + \frac{1}{4}\pi) + \sin(t - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(t + \frac{1}{6}\pi) + \cos(t - \frac{1}{6}\pi)}$$
$$= \frac{\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) + \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi) + \sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) - \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) - \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi) + \cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) + \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi)}$$
$$= \frac{2\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi)}{2\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{2\sin(t)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\cos(t)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tan(t)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\tan(t)$$
Dus $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

d $s = 1\frac{1}{4} - \cos(\frac{1}{2}t) - \frac{1}{4}\cos^2(t)$ geeft
$s' = v = \sin(\frac{1}{2}t)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)\cdot{-\sin(t)} = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)$
Voer in $y_1 = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)$.
De optie maximum geeft $x = 3{,}8409...$ en $y = 0{,}7160...$
Dus de maximale snelheid is ongeveer 0,716 m/s.

e $f(x) = 2 + \sin(x) - \cos^2(x)$ geeft
$f'(x) = \cos(x) - 2\cos(x)\cdot{-\sin(x)} = \cos(x) + 2\cos(x)\sin(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x)(1 + 2\sin(x)) = 0$
$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$
De toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 3)$, $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4})$ en $(1\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4})$.

f $1 - \sin^2(x) = 0$ geeft $\sin^2(x) = 1$
$\sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$
$\cos(x)\cdot(\cos(2x) + 1) = 0$ geeft $\cos(x) = 0 \vee \cos(2x) = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \vee 2x = \pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$
Dus voor $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ krijg je $\frac{0}{0}$.
$$f(x) = \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x)\cdot(\cos(2x) + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)\cdot(2\cos^2(x) - 1 + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)\cdot 2\cos^2(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}$$
$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2\cos(x)}$ bestaat niet, dus de grafiek van f heeft geen perforatie.

g $f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin(2x)} = \frac{-\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} \wedge \sin(x) \neq 0$
$\sin(x) \neq 0$ en x tussen $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x \neq \pi$.
$\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$
Dus de perforatie is $A(\pi, 0)$ en $g(x) = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)}$.
$$g'(x) = \frac{2\cos(x)\cdot{-\cos(x)} + \sin(x)\cdot{-2\sin(x)}}{4\cos^2(x)} = \frac{-2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{4\cos^2(x)} = \frac{-2}{4\cos^2(x)} = \frac{-1}{2\cos^2(x)}$$
$g'(\pi) = \frac{-1}{2\cdot(-1)^2} = -\frac{1}{2}$, dus $rc_k = 2$.
$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 2x + b \\ \text{door } A(\pi, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\pi + b = 0 \\ b = -2\pi \end{array}$$
Dus $k\colon y = 2x - 2\pi$.

h $f_p(x)=\frac{1}{2}p$ geeft $\cos(x)=\frac{1}{2}$, dus $x=\frac{1}{3}\pi$.

$$O(V)=\int_0^{\frac{1}{3}\pi}(p\cos(x)-\tfrac{1}{2}p)\,\mathrm{d}x=\left[p\sin(x)-\tfrac{1}{2}px\right]_0^{\frac{1}{3}\pi}=p\sin(\tfrac{1}{3}\pi)-\tfrac{1}{6}\pi p-0$$

$O(V)=2$ geeft $p(\sin(\frac{1}{3}\pi)-\frac{1}{6}\pi)=2$

$$p(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{6}\pi)=2$$

$$p=\frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pi}\approx 5{,}84$$

Bladzijde 204

69 **a** $A(2\cos(t),\,2\sin(t))$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\overrightarrow{BA}_R\\ \overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}2\cos(t)-4\\2\sin(t)\end{pmatrix},\text{ dus }\overrightarrow{BA}_R=\begin{pmatrix}2\sin(t)\\4-2\cos(t)\end{pmatrix}\end{array}\right\}\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\sin(t)\\4-2\cos(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\sin(t)\\4-2\cos(t)\end{pmatrix}$$

b Los op $|\sin(2t)|=|\sin(t)|$

$\sin(2t)=\sin(t)\vee\sin(2t)=-\sin(t)$

$\sin(2t)=\sin(t)\vee\sin(2t)=\sin(-t)$

$2t=t+k\cdot 2\pi\vee 2t=\pi-t+k\cdot 2\pi\vee 2t=-t+k\cdot 2\pi\vee 2t=\pi+t+k\cdot 2\pi$

$t=k\cdot 2\pi\vee 3t=\pi+k\cdot 2\pi\vee 3t=k\cdot 2\pi\vee t=\pi+k\cdot 2\pi$

$t=k\cdot 2\pi\vee t=\frac{1}{3}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\vee t=k\cdot\frac{2}{3}\pi\vee t=\pi+k\cdot 2\pi$

t in $[0,2\pi]$ geeft $t=0\vee t=\pi\vee t=2\pi\vee t=\frac{1}{3}\pi\vee t=1\frac{2}{3}\pi\vee t=\frac{2}{3}\pi\vee t=1\frac{1}{3}\pi$

Het vierde tijdstip is $t=1\frac{2}{3}\pi$.

c $y(t)=0$ geeft $\sin(t)+\cos(2t)=0$

$\sin(t)=-\cos(2t)$

$\cos(t-\frac{1}{2}\pi)=\cos(2t+\pi)$

$t-\frac{1}{2}\pi=2t+\pi+k\cdot 2\pi\vee t-\frac{1}{2}\pi=-2t-\pi+k\cdot 2\pi$

$-t=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi\vee 3t=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$t=-1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi\vee t=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

t in $[0,2\pi]$ geeft $t=\frac{1}{2}\pi\vee t=1\frac{1}{6}\pi\vee t=1\frac{5}{6}\pi$

$t_A=1\frac{1}{6}\pi$ en $t_B=1\frac{5}{6}\pi$, dus het duurt $1\frac{5}{6}\pi-1\frac{1}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$ seconden.

d $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}-3\sin(t)\\\cos(t)-2\sin(2t)\end{pmatrix}$

$t_A=1\frac{1}{6}\pi$, zie vraag c.

$$\vec{v}(1\tfrac{1}{6}\pi)=\begin{pmatrix}-3\sin(1\frac{1}{6}\pi)\\\cos(1\frac{1}{6}\pi)-2\sin(2\frac{1}{3}\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

De snelheid in A is $v(1\frac{1}{6}\pi)=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{9}=3$ m/s.

e $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}-2\sin(2t-\pi)\\2\sin(t)\cos(t)+4\cos(4t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin(2t)\\\sin(2t)+4\cos(4t)\end{pmatrix}$

$$\vec{v}(\tfrac{1}{4}\pi)=\begin{pmatrix}2\sin(\frac{1}{2}\pi)\\\sin(\frac{1}{2}\pi)+4\cos(\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1\\1+4\cdot-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\tfrac{3}{4}\pi)=\begin{pmatrix}2\sin(1\frac{1}{2}\pi)\\\sin(1\frac{1}{2}\pi)+4\cos(3\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot-1\\-1+4\cdot-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\vec{v}(\tfrac{1}{4}\pi),\vec{v}(\tfrac{3}{4}\pi)))=\frac{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}=\frac{-4+15}{\sqrt{377}}=\frac{11}{\sqrt{377}}$$

De gevraagde hoek is $\varphi\approx 55{,}5°$.

Bladzijde 209

70 $z=1-\cos(t)+\frac{1}{8}\sin^2(t)$ geeft $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\sin(t)+\frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)$

Voer in $y_1=\sin(x)+\frac{1}{4}\sin(x)\cos(x)$.

De optie maximum geeft $x=1{,}344...$ en $y=1{,}029...$

Dus de maximale snelheid is 1,03.

© Noordhoff Uitgevers bv

71 $x(t) = 0$ geeft $\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$$\sin(2t) = -\sin(t)$$
$$\sin(2t) = \sin(-t)$$
$$2t = -t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - -t + k \cdot 2\pi$$
$$3t = k \cdot 2\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$0 < t < \pi$ geeft $t = \frac{2}{3}\pi$

$x'(t) = \cos(2t) \cdot 2 + \cos(t)$ en $y'(t) = -\sin(t)$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(\tfrac{2}{3}\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(1\frac{1}{3}\pi) + \cos(\frac{2}{3}\pi) \\ -\sin(\frac{2}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dus de snelheid in B is $\sqrt{(-1\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

72 Er is een perforatie als $1 + \cos(2x) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\cos(2x) = -1 \wedge x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$2x = \pi + k \cdot 2\pi \wedge x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi}\left(\frac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} + 1\right)$$
$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi}(2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1\right) = \lim_{x \to 1\frac{1}{2}\pi}(2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Dus de perforaties zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$.

73 **a** $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$ geeft $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$

$f'(x) = 0$ geeft $6\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 0$

$$2\cos(x)(3 + 2\sin(x)) = 0$$
$$\cos(x) = 0 \ \vee\ \sin(x) = -1\tfrac{1}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ geen opl.}$$

b $f(1\frac{1}{2}\pi - 1) = -3{,}6579...$

De gevraagde afstand is $5 - 3{,}6579... \approx 1{,}34$.

Bladzijde 210

74 **a** Voer in $y_1 = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}x\right)$ en $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x = 147{,}62...$ en $x = 596{,}37...$

De droogligtijd is $596{,}37... - 147{,}62... \approx 450$ minuten.

b De grafiek van h is symmetrisch in de lijn $t = \frac{745}{2}$.

Dus $\begin{cases} t_2 + t_1 = 745 \\ t_2 - t_1 = D \end{cases}$ $-$

$$2t_1 = 745 - D$$
$$t_1 = \tfrac{745}{2} - \tfrac{1}{2}D$$

$$z = h(t_1) = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}(\tfrac{745}{2} - \tfrac{1}{2}D)\right) = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

Bladzijde 211

c $z = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$ geeft $\frac{dz}{dD} = -125\sin\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right) \cdot -\frac{\pi}{745} = \frac{125\pi}{745}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$

$\left[\frac{dz}{dD}\right]_{D = 372,5} = \frac{125\pi}{745}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{745} \cdot 372,5\right) = \frac{125\pi}{745}\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{125\pi}{745}$

Dus de helling bij figuur 16.137 is $\frac{745}{125\pi} \approx 1,9$

$D = 8 \cdot 10^{-5}z^3 + 1,7z + 372,5$ geeft $\frac{dD}{dz} = 2,4 \cdot 10^{-4}z^2 + 1,7$

$\left[\frac{dD}{dz}\right]_{z=0} = 1,7$

Dus de helling bij figuur 16.138 is 1,7.

75 $g(x) = 0$ geeft $3 - \sqrt{2x} = 0$

$\sqrt{2x} = 3$

$2x = 9$

$x = 4\tfrac{1}{2}$, dus $x_A = 4\tfrac{1}{2}$

$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x}$ geeft

$f'(x) = -3\sin(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$

Los op $f'(x) = 0$.

Voer in $y_1 = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

De optie nulpunt geeft $x = 1,617...$, $x = 3,108...$ en $x = 4,739...$

Dus $x_B = 4,739...$ en dit is groter dan $x_A = 4,5$, dus B ligt rechts van A.

Bladzijde 212

76 **a** $x(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$

$y(t) = 2\cos(t)$ geeft $y'(t) = -2\sin(t)$

$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2\cos(2x))^2 + (-2\sin(x))^2}$.

De optie maximum geeft $x = 1,57...$ en $y = 3,60...$

De maximale snelheid is 3,6 m/s.

b $y(t) = x(t)$ geeft $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$

$\cos(t) = 2\sin(t)\cos(t)$

$\cos(t) = 0 \vee 2\sin(t) = 1$

$\cos(t) = 0$ geeft O

$\sin(t) = \tfrac{1}{2}$ geeft $t_A = \tfrac{1}{6}\pi$ en $t_B = \tfrac{5}{6}\pi$

De beweging van A naar B duurt $\tfrac{5}{6}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{2}{3}\pi$ seconden.

c helling $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t + \pi) - 2\cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$

$= \frac{-2\cos(t) - 2\cos(t)}{-\cos(t) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{-4\cos(t)}{-2\cos(t)}$

Dit is voor elke t met $\cos(t) \neq 0$ gelijk aan 2 en dus onafhankelijk van t.

Bladzijde 213

77 De omtrek van c_1 is $2\pi r = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} = \pi$, dus de omtrek van c_2 is 4π en dus is de straal van c_2 gelijk aan 2.

Dus $l = 2$.

Het middelpunt van c_2 is $(0, 1\tfrac{1}{2})$ en de evenwichtsstand van y_Q is $1\tfrac{1}{2}$, dus $k = 1\tfrac{1}{2}$.

Een rondgang van Q duurt 12 seconden, dus $m = \frac{2\pi}{12} = \tfrac{1}{6}\pi$.

Het punt Q gaat een kwart periode na $t = 0$ omhoog door de evenwichtsstand, dus $n = 3$.

78 **a** Er moet bewezen worden dat $\cos(\pi - a)\sin(2(\pi - a)) = \cos(a)\sin(2a)$.

$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

$\sin(2(\pi - a)) = \sin(2\pi - 2a) = -\sin(2a)$

Dus $\cos(\pi - a)\sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a)\sin(2a)$.

Dus beide punten bevinden zich recht boven elkaar en dus is de lijn door de punten verticaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Er moet gelden $|y(t)| = 2 \cdot |x(t)|$.
$|\cos(t)| = 2 \cdot |\cos(t)\sin(2t)|$
$\cos(t) = 0 \vee 2 \cdot |\sin(2t)| = 1$
$\cos(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$ en deze laten we buiten beschouwing.
$|\sin(2t)| = \frac{1}{2}$
$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
$0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = \frac{1}{12}\pi \vee t = \frac{7}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{12}\pi \vee t = 1\frac{7}{12}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi \vee t = \frac{11}{12}\pi \vee t = 1\frac{5}{12}\pi \vee t = 1\frac{11}{12}\pi$
Het vierde tijdstip is $t = \frac{11}{12}\pi$.

c $\overrightarrow{OP}_t = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{OP}_{\frac{3}{4}\pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$x'(t) = -\sin(t) \cdot \sin(2t) + \cos(t) \cdot 2\cos(2t)$
$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$
$\vec{v}(\frac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(1\frac{1}{2}\pi) - \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(1\frac{1}{2}\pi) \\ -\sin(\frac{3}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
Dus voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt $\overrightarrow{OP}_t = \vec{v}$.

Bladzijde 214

79 **a** $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}$
Delen van teller en noemer door $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ geeft

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 + \dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}.$$

b $\tan(\varphi) = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} = \dfrac{\frac{75}{x} - \frac{27}{x}}{1 + \frac{75}{x} \cdot \frac{27}{x}} = \dfrac{75x - 27x}{x^2 + 75 \cdot 27} = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$

c $g(x) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$ geeft

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 2025) \cdot 48 - 48x \cdot 2x}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{48x^2 + 97\,200 - 96x^2}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{97\,200 - 48x^2}{(x^2 + 2025)^2}$$

$g'(x) = 0$ geeft $97\,200 - 48x^2 = 0$
$48x^2 = 97\,200$
$x^2 = 2025$
$x = 45$ ($x = -45$ voldoet niet)
De afstand is 45 meter.

Bladzijde 215

80 **a** $f(x) = \sqrt{2}$ geeft $\dfrac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$
$\cos(x) = -\sin^2(x) \cdot \sqrt{2}$
$\cos(x) = -(1 - \cos^2(x)) \cdot \sqrt{2}$
$\cos(x) = \cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}$
$\cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$
Stel $\cos(x) = u$.
$u^2 \cdot \sqrt{2} - u - \sqrt{2} = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2} = 9$
$u = \dfrac{1 + 3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \vee u = \dfrac{1 - 3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\cos(x) = \sqrt{2}$ vold. niet $\vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
Dus $x_A = \frac{3}{4}\pi$ en $x_B = 1\frac{1}{4}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Er moet een waarde van x zijn waarvoor $\cos(x) = 0 \wedge p - \sin^2(x) = 0$.
$\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
Voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ is $\sin^2(x) = 1$.
Dus de noemer wordt dan 0 als $p = 1$.

$$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\cos(x)}$$

Deze limiet bestaat niet, dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

c

$$f_p(0) = \frac{1}{p - 0} = \frac{1}{p}, \text{ dus } P\left(0, \frac{1}{p}\right)$$

$$f_p(\pi) = \frac{-1}{p - 0} = -\frac{1}{p}, \text{ dus } Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$$

$$f_p(2\pi) = \frac{1}{p - 0} = \frac{1}{p}, \text{ dus } R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{rc}_{PQ} = \frac{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi} = -\frac{2}{p\pi}$$

$$\text{rc}_{QR} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \frac{2}{p\pi}$$

$PQ \perp QR$, dus $\text{rc}_{PQ} \cdot \text{rc}_{QR} = -1$

$$-\frac{2}{p\pi} \cdot \frac{2}{p\pi} = -1$$

$$\frac{4}{p^2\pi^2} = 1$$

$$p^2\pi^2 = 4$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \vee p = -\frac{2}{\pi}$$

Bladzijde 216

81 **a** Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$.
$AC^2 = (\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)$
$BC^2 = \cos^2(t) + (\sin(t) - 1)^2$
Voer in $y_1 = (\cos(x) - 1)^2 + \sin^2(x)$ en $y_2 = 2(\cos^2(x) + (\sin(x) - 1)^2)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}927...$ en $y = 0{,}8$, dus $t \approx 0{,}93$.

b $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}_R$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB}_R = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

82 **a** $y(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = \sin(t)$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$
$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = 0 \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = 1\frac{2}{3}\pi$

$x(0) = x(2\pi) = 1 - 0 = 1$
$x(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x(\pi) = 1 - 0 = 1$
$x(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Dus $x_p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 217

b $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$ geeft $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$
$y(t) = \sin(2t) - \sin(t)$ geeft $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$
$x'(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $x'(\pi) = -2$, $y'(\pi) = 3$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4 + 3}{\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$\varphi \approx 29{,}7°$

83 **a** $A(p) = \displaystyle\int_p^{\pi - p} 2\sin(x)\,dx = \left[-2\cos(x)\right]_p^{\pi - p} = -2\cos(\pi - p) + 2\cos(p)$
$= 2\cos(p) + 2\cos(p) = 4\cos(p)$

b $O(W) = \frac{1}{2}A(p) = 2\cos(p)$
$O(W) = (\pi - p - p) \cdot f(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$
Dus $2\cos(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$.
Voer in $y_1 = 2\cos(x)$ en $y_2 = (\pi - 2x) \cdot 2\sin(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}405...$
Dus $p \approx 0{,}41$.

Gemengde opgaven

13 Limieten en asymptoten

Bladzijde 218

1 **a** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x^2-9)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}x=3$

b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2a-x^2}{(x+a)(x-a)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2a-x^2}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2a}{x^2}-1}{1-\frac{a^2}{x^2}}=\dfrac{0-1}{1-0}=-1$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{3+\ln(x^4)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\ln(x)}{3+4\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{\ln(x)}+4}=\dfrac{\frac{1}{2}}{0+4}=\frac{1}{8}$

d $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{2x}-e^6}{e^3-e^x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(e^x-e^3)(e^x+e^3)}{-(e^x-e^3)}=\lim\limits_{x\to 3}-(e^x+e^3)=-(e^3+e^3)=-2e^3$

e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x+2}}{e^{2x}+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{e^{2x+2}}{e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^2}{1+\frac{2}{e^{2x}}}=\dfrac{e^2}{1+0}=e^2$

f $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2+\ln(x^3)}=\lim\limits_{\ln(x)\to-\infty}\dfrac{\ln(x^{-1})}{2+3\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to-\infty}\dfrac{-\ln(x)}{2+3\ln(x)}=\lim\limits_{\ln(x)\to-\infty}\dfrac{-1}{\frac{2}{\ln(x)}+3}=\dfrac{-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$

2 **a** $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

Er is een perforatie als $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{-1+2}{-1-1}=-\frac{1}{2}$

Dus de perforatie is $A(-1, -\frac{1}{2})$.

$g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=\dfrac{x-3}{(x+1)(x-3)}$

Er is een perforatie als $x=3$.

$\lim\limits_{x\to 3}g(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$

Dus de perforatie is $B(3, \frac{1}{4})$.

Stel k: $y=ax+b$ met $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{1}{4}--\frac{1}{2}}{3--1}=\dfrac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{16}$.

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{3}{16}x+b \\ \text{door } A(-1,-\frac{1}{2}) \end{array}\right\}\begin{array}{l} -\frac{3}{16}+b=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{5}{16} \end{array}$

Dus k: $y=\frac{3}{16}x-\frac{5}{16}$

$16y=3x-5$

$3x-16y=5$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$ mits $x \neq -1$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x-1)\cdot 1-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rc}_l = f'(0) = \dfrac{-3}{(-1)^2} = -3 \\ f(0) = -2 \text{, dus } C(0, -2) \end{array}\right\} l\colon y = -3x-2$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 1$.

$g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{1}{x+1}$ mits $x \neq 3$

$x + 1 = 0$ geeft $x = -1$

Dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = -1$.

Dus $D(-1, 1)$.

$x = -1$ en $y = -3x - 2$ geeft $y = 1$

Dus D ligt op l.

3 **a** $f_3(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+3} = \dfrac{2x(2x+3)-6x+4x-15}{2x+3} = 2x + \dfrac{-2x-15}{2x+3} = 2x + \dfrac{-(2x+3)+3-15}{2x+3}$

$= 2x - 1 - \dfrac{12}{2x+3}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12}{2x+3} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 2x - 1$.

$2x + 3 = 0 \wedge 4x^2 + 4x - 15 \neq 0$ geeft $x = -1\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -1\frac{1}{2}$.

b $f_a(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+a} = \dfrac{2x(2x+a)-2ax+4x-15}{2x+a} = 2x + \dfrac{-2ax+4x-15}{2x+a}$

Voor scheve asymptoot $y = 2x$ moet gelden dat $-2a = -4$, dus $a = 2$.

Want dan is $f_a(x) = 2x - \dfrac{15}{2x+a}$ en $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15}{2x+a} = 0$.

c $f_a(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+a} = \dfrac{(2x-3)(2x+5)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a = -3$ en als $a = 5$.

$\lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+5)}{2x-3} = \lim\limits_{x\to 1\frac{1}{2}} (2x+5) = 3 + 5 = 8$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 8)$.

$\lim\limits_{x\to -2\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x\to -2\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+5)}{2x+5} = \lim\limits_{x\to -2\frac{1}{2}} (2x-3) = -5 - 3 = -8$

Voor $a = 5$ is de perforatie $(-2\frac{1}{2}, -8)$.

4 **a** $2\,e^{-x} - 4 = 0 \wedge e^x + 1 \neq 0$

$2\,e^{-x} = 4 \wedge e^x \neq -1$

$e^{-x} = 2$

$-x = \ln(2)$

$x = -\ln(2)$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -\ln(2)$.

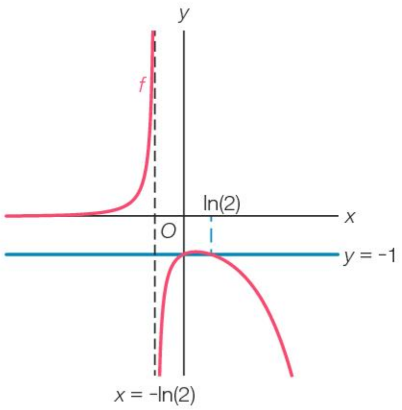
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x+1}{2\,e^{-x}-4} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{2x}+e^x}{2-4\,e^x} = \dfrac{0+0}{2-0} = 0$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f(x) = -1$ geeft $\dfrac{e^x + 1}{2\,e^{-x} - 4} = -1$

$e^x + 1 = -2\,e^{-x} + 4$
$e^x - 3 + 2\,e^{-x} = 0$
$e^{2x} - 3\,e^x + 2 = 0$
$(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$
$e^x = 1 \vee e^x = 2$
$x = 0 \vee x = \ln(2)$



$f(x) \geq -1$ geeft $x < -\ln(2) \vee 0 \leq x \leq \ln(2)$

Bladzijde 219

5 **a** $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow 2}(x^2 + 4px) = \lim\limits_{x \downarrow 2}(2x + q)$

$4 + 8p = 4 + q$
$q = 8p$

$\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow 3}(2x + q) = \lim\limits_{x \downarrow 3}(x^3 - 4x + p)$

$6 + q = 27 - 12 + p$
$q = p + 9$

$8p = p + 9$
$7p = 9$
$p = 1\frac{2}{7}$
$q = 1\frac{2}{7} + 9 = 10\frac{2}{7}$

b $A(3, 10)$ is een perforatie als $\lim\limits_{x \uparrow 3}(2x + q) = 10 \wedge \lim\limits_{x \downarrow 3}(x^3 - 4x + p) = 10$

$6 + q = 10 \wedge 27 - 12 + p = 10$
$q = 4 \wedge p = -5$

c $f_{p,q}$ heeft een extreme waarde voor $x = -1$ als $\dfrac{-4p}{2} = -1$

$p = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $q = p + 9$, dus $q = \frac{1}{2} + 9 = 9\frac{1}{2}$.

6 **a** De grafiek heeft een knik voor $x = p$.
De top met horizontale raaklijn ligt rechts van de knik.
Rechts van de knik is $x > p$, dus $f_p(x) = (x - p)(e^x - 3)$ en
$f_p'(x) = 1 \cdot (e^x - 3) + (x - p) \cdot e^x = (x - p + 1)e^x - 3$.
$f_p'(-1) = 0$ geeft $(-1 - p + 1)e^{-1} - 3 = 0$

$-pe^{-1} = 3$
$p = -3e$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f_p'(x) = \begin{cases} (x-p+1)e^x - 3 \text{ voor } x > p \\ -(x-p+1)e^x + 3 \text{ voor } x < p \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow p}(-(x-p+1)e^x + 3) = -e^p + 3$

$\lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p}((x-p+1)e^x - 3) = e^p - 3$

Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x)$, dus als $-e^p + 3 = e^p - 3$

$2\,e^p = 6$

$e^p = 3$

$p = \ln(3)$

c $f_2(x) = |x-2|(e^x - 3) = \begin{cases} (x-2)(e^x-3) \text{ voor } x \geq 2 \\ -(x-2)(e^x-3) \text{ voor } x < 2 \end{cases}$

$f_2'(x) = \begin{cases} (x-1)e^x - 3 \text{ voor } x > 2 \\ -(x-1)e^x + 3 \text{ voor } x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2}(-(x-1)e^x + 3) = -e^2 + 3$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2}((x-1)e^x - 3) = e^2 - 3$

$rc_k = \tan(\alpha) = -e^2 + 3$ geeft $\alpha = -77{,}1...°$

$rc_l = \tan(\beta) = e^2 - 3$ geeft $\beta = 77{,}1...°$

$\beta - \alpha \approx 154°$

$\angle(k, l) \approx 180° - 154° = 26°$

d $\angle(k, l) = 90°$ geeft $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) \cdot \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = -1$

$(-e^p + 3) \cdot (e^p - 3) = -1$

$(e^p - 3)^2 = 1$

$e^p - 3 = 1 \vee e^p - 3 = -1$

$e^p = 4 \vee e^p = 2$

$p = \ln(4) \vee p = \ln(2)$

7 **a** $e^{\frac{1}{x}} - a = 0 \wedge 2\,e^{\frac{1}{x}} \neq 0$

$e^{\frac{1}{x}} = a$

$\frac{1}{x} = \ln(a)$

$x = \frac{1}{\ln(a)}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{\ln(a)}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a} = \frac{2\,e^0}{e^0 - a} = \frac{2}{1-a}$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{1-a}$.

Het snijpunt van de asymptoten in het punt $\left(\frac{1}{\ln(a)}, \frac{2}{1-a}\right)$.

Dit punt ligt op de lijn $y = x - 1$ geeft $\frac{2}{1-a} = \frac{1}{\ln(a)} - 1$.

Voer in $y_1 = \frac{2}{1-x}$ en $y_2 = \frac{1}{\ln(x)} - 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 5{,}700...$

Dus $a \approx 5{,}70$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f_a(x) = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}} - a) \cdot 2\,e^{\frac{1}{x}} \cdot -\dfrac{1}{x^2} - 2\,e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot -\dfrac{1}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \dfrac{2\,e^{\frac{2}{x}} - 2a\,e^{\frac{1}{x}} - 2\,e^{\frac{2}{x}}}{-x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \dfrac{2a\,e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2}$

$f_a'(1) = 4$ geeft $\dfrac{2a\,e}{(e - a)^2} = 4$

$2(e - a)^2 = a\,e$

$2(e^2 - 2a\,e + a^2) = a\,e$

$2\,e^2 - 4a\,e + 2a^2 = a\,e$

$2a^2 - 5a\,e + 2\,e^2 = 0$

$D = (-5\,e)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\,e^2 = 9\,e^2$

$a = \dfrac{5\,e + 3\,e}{4} = 2\,e \vee a = \dfrac{5\,e - 3\,e}{4} = \frac{1}{2}\,e$

c Voor f_a geldt $y = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$, dus voor f_a^{inv} geldt $x = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a}$.

$x = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a}$ geeft $x(e^{\frac{1}{y}} - a) = 2\,e^{\frac{1}{y}}$

$x\,e^{\frac{1}{y}} - 2\,e^{\frac{1}{y}} = ax$

$e^{\frac{1}{y}}(x - 2) = ax$

$e^{\frac{1}{y}} = \dfrac{ax}{x - 2}$

$\dfrac{1}{y} = \ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)$

$y = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)}$

Dus $f_a^{\text{inv}}(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)}$.

Bladzijde 220

8 **a** De grafiek van $f_a(x) = \dfrac{ax + 4}{2x - 3}$ heeft een perforatie als $2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 = 0$.

$2x - 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$

$ax + 4 = 0$ en $x = 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}a + 4 = 0$

$1\frac{1}{2}a = -4$

$a = -2\frac{2}{3}$

b De grafieken van f_a en f_a^{inv} snijden elkaar op de lijn $y = x$, dus $f_a(4) = 4$

$\dfrac{4a + 4}{8 - 3} = 4$

$4a + 4 = 20$

$4a = 16$

$a = 4$

c $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax + 4}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a + \dfrac{4}{x}}{2 - \dfrac{3}{x}} = \dfrac{a + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}a$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}a$.

$2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 \neq 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \wedge a \neq -2\frac{2}{3}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

Het snijpunt $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ ligt op de parabool $y = x^2$ als $\frac{1}{2}a = (1\frac{1}{2})^2$

$\frac{1}{2}a = 2\frac{1}{4}$

$a = 4\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2-|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{2-(x-1)}=\dfrac{x^2-x}{3-x} \text{ voor } x\ge 1\\ \dfrac{x^2-x}{2-(-x+1)}=\dfrac{x^2-x}{x+1} \text{ voor } x<1\end{cases}$

noemer = 0 voor $x \ge 1$ geeft $3-x=0$, dus $x=3$.
noemer = 0 voor $x<1$ geeft $x+1=0$, dus $x=-1$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x=3$ en $x=-1$.

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{3-x}=\dfrac{-x(3-x)+3x-x}{3-x}=-x+\dfrac{2x}{3-x}=-x+\dfrac{-2(3-x)+6}{3-x}=-x-2+\dfrac{6}{3-x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{3-x}=0$, dus de lijn $y=-x-2$ is scheve asymptoot.

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}=\dfrac{x(x+1)-x-x}{x+1}=x-\dfrac{2x}{x+1}=x-\dfrac{2(x+1)-2}{x+1}=x-2+\dfrac{2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$, dus de lijn $y=x-2$ is scheve asymptoot.

b $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ geeft $f'(x)=\dfrac{(x+1)\cdot(2x-1)-(x^2-x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2-x+2x-1-x^2+x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ geeft $x^2+2x-1=0$
$(x+1)^2-1-1=0$
$(x+1)^2=2$
$x+1=\sqrt{2} \vee x+1=-\sqrt{2}$
$x=-1+\sqrt{2} \vee x=-1-\sqrt{2}$
vold. niet

$y_A=f(-1-\sqrt{2})=\dfrac{(-1-\sqrt{2})^2-(-1-\sqrt{2})}{-1-\sqrt{2}+1}=\dfrac{1+2\sqrt{2}+2+1+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}-3$

c Voer in $y_1=\dfrac{x^2-x}{2-|x-1|}$.
De optie maximum geeft $x\approx-2{,}41$ en $y\approx-5{,}83$ en ook $x\approx 5{,}45$ en $y\approx-9{,}90$.
De optie minimum geeft $x\approx 0{,}41$ en $y\approx-0{,}17$.
$f(x)=p$ heeft twee oplossingen voor $-9{,}90<p<-5{,}83 \vee p>-0{,}17$.

d $x<1$ en $f(x)=2$ geeft $\dfrac{x^2-x}{x+1}=2$
$x^2-x=2x+2$
$x^2-3x-2=0$
$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot -2=17$
$x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$
vold. niet

$x\ge 1$ en $f(x)=2$ geeft $\dfrac{x^2-x}{3-x}=2$
$x^2-x=6-2x$
$x^2+x-6=0$
$(x-2)(x+3)=0$
$x=2 \vee x=-3$
vold. niet

$f(x)\le 2$ geeft $x<-1 \vee \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\le x\le 2 \vee x>3$

10 **a** $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = \dfrac{x(x^2 - 2x) + 2x^2 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = x + \dfrac{(a+2)x^2 + 4}{x^2 - 2x} =$

$= x + \dfrac{(a+2)(x^2 - 2x) + 2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x + a + 2 + \dfrac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2a}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{0+0+0}{1-0} = 0$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + a + 2$.
$A(2, 3)$ op de scheve asymptoot geeft $2 + a + 2 = 3$
$a = -1$

b $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{(x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2ax) - (x^3 + ax^2 + 4) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$

Top op de lijn $x = 1$ geeft $f_a'(1) = 0$

$$\frac{(1-2)(3+2a) - (1 + a + 4)(2-2)}{(1-2)^2} = 0$$

$-3 - 2a - 0 = 0$
$-2a = 3$
$a = -1\frac{1}{2}$

c De grafiek van $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$ heeft een perforatie als $x^2 - 2x = 0 \wedge x^3 + ax^2 + 4 = 0$.

$x^2 - 2x = 0$ geeft $x(x-2) = 0$
$x = 0 \vee x = 2$
$x = 0$ en $x^3 + ax^2 + 4 = 0$ geeft $4 = 0$, dus voldoet niet.
$x = 2$ en $x^3 + ax^2 + 4 = 0$ geeft $8 + 4a + 4 = 0$
$4a = -12$
$a = -3$

Dus voor $a = -3$ heeft de grafiek van f_a een perforatie.

Echter $f_{-3}(x) = x - 3 + 2 + \dfrac{2 \cdot -3x + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x - 1 + \dfrac{-2x + 4}{x^2 - 2x}$.
Dus de grafiek van f_{-3} is geen rechte lijn.
Dus voor geen enkele waarde van a is de grafiek een rechte lijn met een perforatie.

11 **a** $\ln(x^2) + 1 = 0 \wedge \ln(x^2) - 1 \neq 0$
$\ln(x^2) = -1 \wedge \ln(x^2) \neq 1$
$x^2 = e^{-1} \wedge x^2 \neq e$
$x = e^{-\frac{1}{2}} \vee x = -e^{-\frac{1}{2}}$
Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = e^{-\frac{1}{2}}$ en $x = -e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

b Voor $x > 0$ is $f(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1}$ en voor $x < 0$ is $f(x) = \dfrac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1}$.

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to-\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to-\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x)\to-\infty} \frac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x)\to-\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(-x)}}{2 + \frac{1}{\ln(-x)}} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

Dus de perforatie is het punt $(0, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(x) = \frac{3}{5}$ geeft $\frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} = \frac{3}{5}$

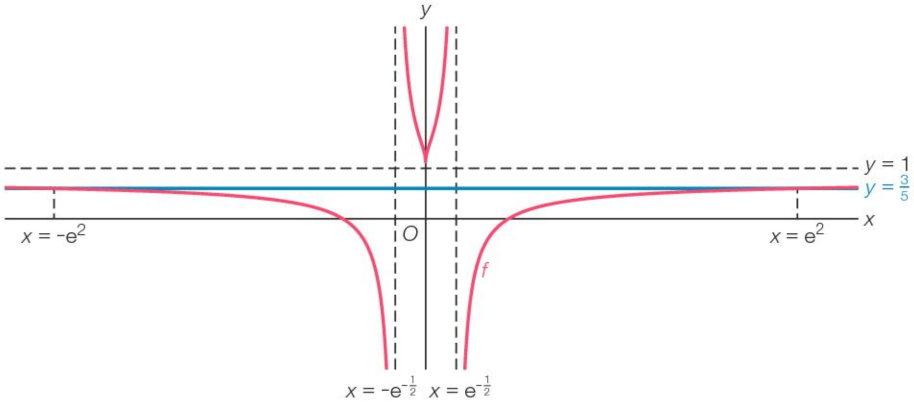
$3\ln(x^2) + 3 = 5\ln(x^2) - 5$

$-2\ln(x^2) = -8$

$\ln(x^2) = 4$

$x^2 = \mathrm{e}^4$

$x = \mathrm{e}^2 \vee x = -\mathrm{e}^2$



$f(x) \geq \frac{3}{5}$ geeft $x \leq -\mathrm{e}^2 \vee -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \vee x \geq \mathrm{e}^2$

d $f(x) = \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - (\ln(x^2) - 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot 2 - (\ln(x^2) - 1) \cdot 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2}$

$= \frac{2\ln(x^2) + 2 - 2\ln(x^2) + 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{4}{x(\ln(x^2) + 1)^2}$

Stel $y = ax + b$ met $a = f'(\mathrm{e}) = \frac{4}{\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}^2) + 1)^2} = \frac{4}{\mathrm{e}(2 + 1)^2} = \frac{4}{9\mathrm{e}}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{9\mathrm{e}}x + b \\ f(\mathrm{e}) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(\mathrm{e}, \frac{1}{3}) \end{array}\right\} \frac{4}{9\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e} + b = \frac{1}{3}$

$\frac{4}{9} + b = \frac{1}{3}$

$b = -\frac{1}{9}$

$y = \frac{4}{9\mathrm{e}}x - \frac{1}{9}$ snijden met de x-as geeft $\frac{4}{9\mathrm{e}}x - \frac{1}{9} = 0$

$4x - \mathrm{e} = 0$

$4x = \mathrm{e}$

$x = \frac{1}{4}\mathrm{e}$

Dus $B(\frac{1}{4}\mathrm{e}, 0)$.

14 Meetkunde toepassen

Bladzijde 221

12 **a** Een parametervoorstelling van c is $x = 3\cos(t) \wedge y = 6 + 3\sin(t)$ met $-\pi \leq t \leq 0$.

Het midden Q van $B(3, 0)$ en $P(3\cos(t), 6 + 3\sin(t))$ is

$Q(\frac{1}{2}(3 + 3\cos(t), \frac{1}{2}(0 + 6 + 3\sin(t))) = Q(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\cos(t), 3 + 1\frac{1}{2}\sin(t))$.

$-\pi \leq t \leq 0$ geeft $-1 \leq \sin(t) \leq 0$, dus $1\frac{1}{2} \leq 3 + 1\frac{1}{2}\sin(t) \leq 3$, dus $1\frac{1}{2} \leq y_Q \leq 3$.

De baan van Q is de kromme met vergelijking $(x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

$x^2 - 3x + 2\frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

$x^2 + y^2 - 3x - 6y + 9 = 0 \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

Dus $a = -3$, $b = -6$, $c = 9$, $d = 1\frac{1}{2}$ en $e = 3$.

b De totale massa is $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$.

$y_{Z_1} = \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot y_O + 1 \cdot y_A + 1 \cdot y_B + 2 \cdot y_C + 2 \cdot y_D + 3 \cdot y_E)$

$= \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3) = \frac{1}{10} \cdot 33 = 3\frac{3}{10}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Het zwaartepunt (0, 3) van het vierkant heeft massa 36.

De y-coördinaat van het zwaartepunt van de halve cirkel is $6 - \frac{4}{3\pi} \cdot 3 = 6 - \frac{4}{\pi}$.

De massa van het zwaartepunt van de halve cirkel is $\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 4\frac{1}{2}\pi$.

De totale massa is $36 - 4\frac{1}{2}\pi$.

$$y_{Z_2} = \frac{1}{36 - 4\frac{1}{2}\pi} \cdot \left(36 \cdot 3 - 4\tfrac{1}{2}\pi \cdot \left(6 - \frac{4}{\pi}\right)\right) \approx 1{,}88$$

13 **a** $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\frac{2}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ en $Z(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3})$.

Dus het zwaartepunt Z van driehoek ABC ligt op de lijn $y = x$.

b $M(\frac{1}{2}(-1 + 4), \frac{1}{2}(-1 + 1)) = M(1\frac{1}{2}, 0)$, dus $c : (x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = r^2$.

c door $A(-1, -1)$ geeft c: $(x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = 7\frac{1}{4}$.

$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{s}_{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ geeft AC: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

AC snijden met c geeft $(-1 + t - 1\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$

$(t - 2\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$

$t^2 - 5t + 6\frac{1}{4} + 1 - 4t + 4t^2 = 7\frac{1}{4}$

$5t^2 - 9t = 0$

$t(5t - 9) = 0$

$t = 0 \vee 5t - 9 = 0$

$t = 0 \vee t = 1\frac{4}{5}$

$t = 0$ geeft punt A

$t = 1\frac{4}{5}$ geeft $x = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$ en $y = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 2 = 2\frac{3}{5}$

Dus $D(\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$.

c Noem in driehoek ABC de hoogte die bij de zijde AB hoort h_1.
Noem in driehoek BMP de hoogte die bij de zijde BM hoort h_2.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1$

$O(\triangle BMP) = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot h_2 = \frac{1}{4}AB \cdot h_2$

$O(\triangle ABC) = 5 \cdot O(\triangle BMP)$ geeft $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1 = 5 \cdot \frac{1}{4}AB \cdot h_2$

$h_1 = \frac{5}{2}h_2$

$h_2 = \frac{2}{5}h_1$

Dus ook $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

$\vec{p} = \vec{b} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{5}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} = \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{5}\\2\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

Dus $P(3\frac{1}{5}, 2\frac{3}{5})$.

Bladzijde 222

14 **a** $y = 0$ geeft $x^2 - 10x + 9 = 0$

$(x - 1)(x - 9) = 0$

$x = 1 \vee x = 9$

Dus $A(1, 0)$ en $B(9, 0)$.

$y = 7$ geeft $x^2 + 49 - 10x - 42 + 9 = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 2)(x - 8) = 0$

$x = 2 \vee x = 8$

Dus $C(2, 7)$ en $D(8, 7)$.

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 9 = 0$

$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 9 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Dus $M(5, 3)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De totale massa is $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

$\vec{z} = \frac{1}{16}(1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d} + 6 \cdot \vec{m})$

$= \frac{1}{16}\left(1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\21\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}32\\28\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}30\\18\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix}87\\67\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{7}{16}\\4\frac{3}{16}\end{pmatrix}$

Dus $Z(5\frac{7}{16}, 4\frac{3}{16})$.

b $x_M = 5$ en $r_c = 5$, dus de cirkel raakt de y-as.
Dus een van de raaklijnen heeft vergelijking $x = 0$.
De andere raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax$ oftewel $ax - y = 0$.

$d(M, \text{raaklijn}) = r_c$ geeft $\frac{|5a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$

$|5a - 3| = 5\sqrt{a^2 + 1}$

$25a^2 - 30a + 9 = 25a^2 + 25$

$-30a = 16$

$a = -\frac{8}{15}$

Dus de andere raaklijn heeft vergelijking $y = -\frac{8}{15}x$.

c Stel van deze cirkel de straal gelijk aan r.
Dan is $N(r, r)$.
Zie de figuur hiernaast.
De stelling van Pythagoras geeft

$(5 - r)^2 + (3 - r)^2 = (r + 5)^2$

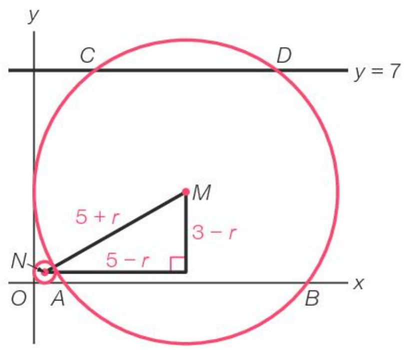
$25 - 10r + r^2 + 9 - 6r + r^2 = r^2 + 10r + 25$

$r^2 - 26r + 9 = 0$

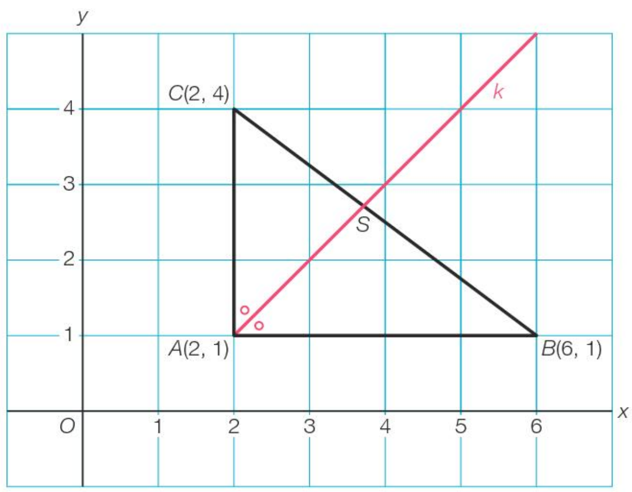
$D = (-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 640$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$

$r = \frac{26 + 8\sqrt{10}}{2} = 13 + 4\sqrt{10} \vee r = 13 - 4\sqrt{10}$

De straal is $13 - 4\sqrt{10}$.



15 **a**



$k: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\text{rc}_{BC} = \frac{1 - 4}{6 - 2} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

$BC: y = -\frac{3}{4}x + b$
door $B(6, 1)$ $\Big\}$ $-\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 1$

$-4\frac{1}{2} + b = 1$

$b = 5\frac{1}{2}$

Dus $BC: y = -\frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2}$.

k snijden met BC geeft $1 + t = -\frac{3}{4}(2 + t) + 5\frac{1}{2}$

$$4 + 4t = -3(2 + t) + 22$$
$$4 + 4t = -6 - 3t + 22$$
$$7t = 12$$
$$t = 1\tfrac{5}{7}$$

$t = 1\frac{5}{7}$ geeft $x = 2 + 1\frac{5}{7} = 3\frac{5}{7}$ en $y = 1 + 1\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}$.

Dus $S(3\frac{5}{7}, 2\frac{5}{7})$.

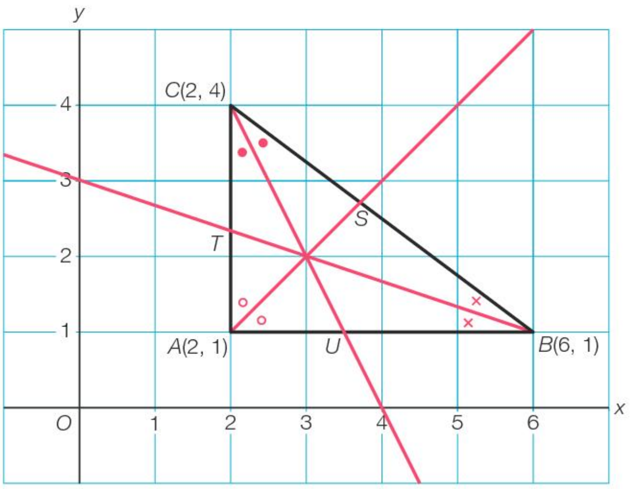
b $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$BS = \sqrt{(3\frac{5}{7} - 6)^2 + (2\frac{5}{7} - 1)^2} = \sqrt{(-\frac{16}{7})^2 + (\frac{12}{7})^2} = \sqrt{\frac{256}{49} + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7}$

$CS = 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{BS}{CS} &= \frac{\frac{20}{7}}{\frac{15}{7}} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \frac{BS}{CS} = \frac{AB}{AC}$$

c



$p = 4$ en $q = 5$ geeft $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Dus $T(2, 2\frac{1}{3})$.

d $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Dus $U(3\frac{1}{2}, 1)$.

Bladzijde 223

16 **a** $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{22\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$

$\vec{r}_b = \overrightarrow{BA} + 1\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en b: $x + y = 4$.

$\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $Z(2\frac{1}{6}, 1\frac{1}{2})$.

$2\frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} = 4$ klopt niet, dus Z ligt niet op b.

b b snijden met de y-as geeft het punt $D(0, 4)$.

$\vec{n}_m = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus m: $-x + 3y = c$.

m door het punt $(\frac{1}{2}(4 + 3), \frac{1}{2}(0 + 3)) = (3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ geeft $c = -3\frac{1}{2} + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 1$.

Dus m: $-x + 3y = 1$.

m snijden met de y-as geeft het punt $E(0, \frac{1}{3})$.

Dus $DE = 4 - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c De straal van de cirkel is $r = d(O, A) = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.
Stel $y = ax + b$.
Door $F(3, 1)$ geeft $3a + b = 1$ oftewel $b = 1 - 3a$, dus $y = ax + 1 - 3a$ oftewel $ax - y + 1 - 3a = 0$.

$$d(A, \text{raaklijn}) = r \text{ geeft } \frac{|-\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} + 1 - 3a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$$
$$|-3\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}| = \sqrt{2\tfrac{1}{2}a^2 + 2\tfrac{1}{2}}$$
$$|-7a - 1| = \sqrt{10a^2 + 10}$$
$$49a^2 + 14a + 1 = 10a^2 + 10$$
$$39a^2 + 14a - 9 = 0$$
$$D = 14^2 - 4 \cdot 39 \cdot -9 = 1600$$
$$a = \frac{-14 + 40}{78} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-14 - 40}{78} = -\frac{9}{13}$$

$a = \frac{1}{3}$ geeft de raaklijn $y = \frac{1}{3}x + 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}$ oftewel $y = \frac{1}{3}x$.
$a = -\frac{9}{13}$ geeft de raaklijn $y = -\frac{9}{13}x + 1 - 3 \cdot -\frac{9}{13}$ oftewel $y = -\frac{9}{13}x + 3\frac{1}{13}$.

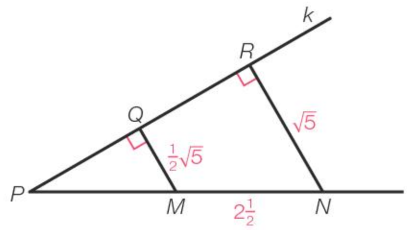
17 **a**
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \end{cases} -$$
$$5x - 15 = 0$$
$$5x = 15$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0 \end{array}\right\} 9 + y^2 - 15 - 2y + 6 = 0$$
$$y^2 - 2y = 0$$
$$y(y - 2) = 0$$
$$y = 0 \vee y = 2$$

Dus $A(3, 0)$ en $B(3, 2)$.

b $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0$
$x^2 - 5x + y^2 - 2y + 6 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 + 6 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 1\frac{1}{4}$
Dus $M(2\frac{1}{2}, 1)$ en $r_c = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 1)^2 - 1 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Dus $N(5, 1)$ en $r_d = \sqrt{5}$.

De punten Q en R zijn raakpunten.
Zie de figuur hiernaast.
$\triangle PMQ \backsim \triangle PNR$ en $NR = 2MQ$, dus
$PN = 2PM$ geeft $PM = 2\frac{1}{2}$.
Dus $P(0, 1)$.



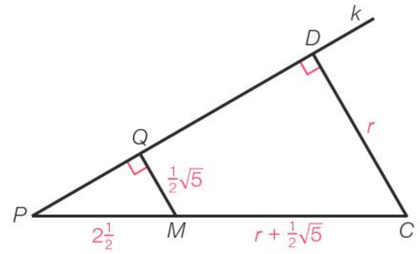
c Stel k: $y = ax + 1$ oftewel k: $ax - y + 1 = 0$.

$$d(N, k) = r_d \text{ geeft } \frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$$
$$|5a| = \sqrt{5a^2 + 5}$$
$$25a^2 = 5a^2 + 5$$
$$20a^2 = 5$$
$$a^2 = \frac{1}{4}$$
$$a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$$

Dus k_1: $y = \frac{1}{2}x + 1$ en k_2: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d Het middelpunt van deze cirkel is C en de straal is r.
De punten Q en D zijn raakpunten.
Zie de figuur hiernaast.



$\triangle PMQ \sim \triangle PCD$ geeft

$\dfrac{PM}{PC} = \dfrac{MQ}{CD}$

$\dfrac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} + r + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{r}$

$\dfrac{5}{5 + 2r + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2r}$

$10r = 5\sqrt{5} + 2r\sqrt{5} + 5$

$10r - 2r\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 5$

$(10 - 2\sqrt{5})r = 5\sqrt{5} + 5$

$r = \dfrac{5\sqrt{5} + 5}{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = \dfrac{50\sqrt{5} + 50 + 50 + 10\sqrt{5}}{100 - 20} = \dfrac{100 + 60\sqrt{5}}{80} = 1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}$

De gevraagde straal is $1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}$.

18 **a** $(t-2)^4 = ((t-2)^2)^2 = (t^2 - 4t + 4)^2 = t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 4t^3 + 16t^2 - 16t + 4t^2 - 16t + 16 =$
$t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16$

b Substitutie van $x = t^2 - 4$ en $y = (t-2)^2$ in de cirkelvergelijking geeft
$(t^2-4)^2 + ((t-2)^2)^2 - 2(t^2-4) - 8(t-2)^2 - 8 = 0$
$t^4 - 8t^2 + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 2t^2 + 8 - 8(t^2 - 4t + 4) - 8 = 0$
$t^4 - 8t^2 + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 2t^2 + 8 - 8t^2 + 32t - 32 - 8 = 0$
$2t^4 - 8t^3 + 6t^2 = 0$
$2t^2(t^2 - 4t + 3) = 0$
$2t^2(t-1)(t-3) = 0$
$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 3$
$t = 0$ geeft $(-4, 4)$
$t = 1$ geeft $(-3, 1)$
$t = 3$ geeft $(5, 1)$

c $(-3, 1)$ op K geeft $9 + 1 = -3a + b$ oftewel $-3a + b = 10$.
$(5, 1)$ op K geeft $25 + 1 = 5a + b$ oftewel $5a + b = 26$.

$$\begin{cases} -3a + b = 10 \\ \underline{5a + b = 26} \; - \end{cases}$$
$$-8a = -16$$
$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ 5a + b = 26 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10 + b = 26 \\ b = 16 \end{array}$$

Dus $a = 2$ en $b = 16$.

d Voor het midden Q van $A(4, -4)$ en $P(t^2 - 4, (t-2)^2)$ geldt $Q(\frac{1}{2}(4 + t^2 - 4), \frac{1}{2}(-4 + (t-2)^2)$
$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}(-4 + t^2 - 4t + 4))$
$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2 - 2t)$

Substitutie van $x = \frac{1}{2}t^2$ en $y = \frac{1}{2}t^2 - 2t$ in $x^2 + y^2 = 2xy + 8x$ geeft
$(\frac{1}{2}t^2)^2 + (\frac{1}{2}t^2 - 2t)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}t^2 \cdot (\frac{1}{2}t^2 - 2t) + 8 \cdot \frac{1}{2}t^2$
$\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 = \frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2$
$\frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2 = \frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2$
Dit klopt voor elke waarde van t.
Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $x^2 + y^2 = 2xy + 8x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

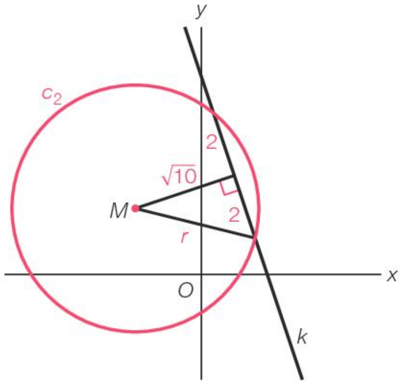
Bladzijde 224

19 **a** k: $3x + y - 6 = 0$

$d(M, k) = \dfrac{|3 \cdot -2 + 2 - 6|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Dus c_1: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

b $d(M, k) = \sqrt{10}$



$r^2 = (\sqrt{10})^2 + 2^2 = 14$

Dus c_2: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 14$.

c m loodrecht op k geeft m: $x - 3y = c$.

$d(M, m) = \sqrt{10}$

$\dfrac{|-2 - 3 \cdot 2 - c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|-8 - c| = 10$

$-8 - c = 10 \vee -8 - c = -10$

$c = -18 \vee c = 2$

Dus m_1: $x - 3y = -18$ en m_2: $x - 3y = 2$.

d Stel n: $y = ax - 2$ oftewel n: $ax - y - 2 = 0$.

$d(M, n) = \sqrt{10}$

$\dfrac{|-2a - 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|-2a - 4| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$4a^2 + 16a + 16 = 10a^2 + 10$

$-6a^2 + 16a + 6 = 0$

$3a^2 - 8a - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$a = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

Dus n_1: $y = 3x - 2$ en n_2: $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

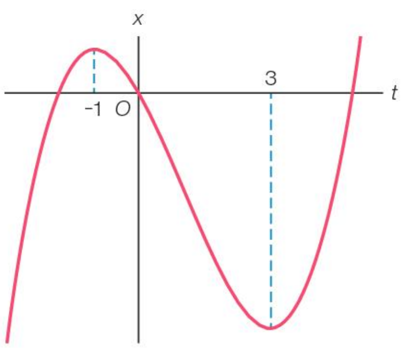
20 **a** $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ geeft $x'(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$x'(t) = 0$ geeft $3t^2 - 6t - 9 = 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t + 1)(t - 3) = 0$

$t = -1 \vee t = 3$



max. is $x(-1) = 5$ en min. is $x(3) = -27$.

Dus $x = p$ snijdt de baan in drie punten voor $-27 < p < 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$

$$t^2 = 1$$
$$t = 1 \vee t = -1$$

$t = 1$ geeft het punt $(-11, 0)$

$x'(t) = 3t^2 - 6t - 9$ en $y'(t) = 2t$ geeft

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{(3t^2 - 6t - 9)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{9t^4 - 18t^3 - 27t^2 - 18t^3 + 36t^2 + 54t - 27t^2 + 54t + 81 + 4t^2} \\ &= \sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81} \end{aligned}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81}} \cdot (36t^3 - 108t^2 - 28t + 108)$$

$$v(1) = \sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81} = \sqrt{148} \approx 12{,}17 \text{ cm/s}$$

$$a(1) = \frac{1}{2\sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81}} \cdot (36 - 108 - 28 + 108) = \frac{4}{\sqrt{148}} \approx 0{,}33 \text{ cm/s}^2$$

c $y = 3$ geeft $t^2 - 1 = 3$

$$t^2 = 4$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = 2$ geeft het punt $A(-22, 3)$ en $t = -2$ geeft het punt $B(-2, 3)$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 6t - 9 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{4}{9}$.

$$\left.\begin{array}{l} k: y = -\frac{4}{9}x + b \\ \text{door } A(-22, 3) \end{array}\right\} -\frac{4}{9} \cdot -22 + b = 3$$
$$9\tfrac{7}{9} + b = 3$$
$$b = -6\tfrac{7}{9}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$.

$\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{4}{15}$.

$$\left.\begin{array}{l} l: y = -\frac{4}{15}x + b \\ \text{door } B(-2, 3) \end{array}\right\} -\frac{4}{15} \cdot -2 + b = 3$$
$$\tfrac{8}{15} + b = 3$$
$$b = 2\tfrac{7}{15}$$

Dus $l: y = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15}$.

k en l snijden geeft $-\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9} = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15}$

$$-20x - 305 = -12x + 111$$
$$-8x = 416$$
$$x = -52$$

$x = -52$ en $y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$ geeft $y = 16\frac{1}{3}$

Dus $S(-52, 16\frac{1}{3})$.

21 **a** $x(t) = \cos^2(t) - \cos(t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(t) \cdot -\sin(t) + \sin(t) = -\sin(2t) + \sin(t)$

$y(t) = \sin(t)$ geeft $y'(t) = \cos(t)$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $\cos(t) = 0$

$$t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$-\pi \leq t \leq \pi \text{ geeft } t = -\tfrac{1}{2}\pi \vee t = \tfrac{1}{2}\pi$$

$t = -\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, -1)$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

Dus de raaklijn is horizontaal in de punten $(0, -1)$ en $(0, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 0$ geeft $-\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$\sin(2t) = \sin(t)$

$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = -\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi$

$t = -\pi$ en $t = \pi$ geven het punt $(2, 0)$.

$t = -\frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

Dus de raaklijn is verticaal in de punten $(2, 0)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

b $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

P gaat door de oorsprong voor $t = 0$ (zie a).

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de gevraagde baansnelheid is 1 cm/s.

c $x(t) = 0$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = 0$

$\cos(t)(\cos(t) - 1) = 0$

$\cos(t) = 0 \vee \cos(t) = 1$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = k \cdot 2\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = -\frac{1}{2}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \\ &= \sqrt{(-\sin(2t) + \sin(t))^2 + (\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (2\sin(2t) \cdot \cos(2t) \cdot 2 - 2\cos(t) \cdot \sin(2t) - 2\sin(t) \cdot \cos(2t) \cdot 2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (4\sin(2t)\cos(2t) - 2\cos(t)\sin(2t) - 4\sin(t)\cos(2t)) \end{aligned}$$

$$a(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2\sqrt{0 - 0 + 1}} \cdot (0 - 0 + 4) = 2$$

De gevraagde baanversnelling is 2 cm/s^2.

d $x(-p) = \cos^2(-p) - \cos(-p) = \cos^2(p) - \cos(p) = x(p)$

$y(-p) = \sin(-p) = -\sin(p) = -y(p)$

Dus de baan van P is symmetrisch in de x-as.

e $x = \frac{3}{4}$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = \frac{3}{4}$

$\cos^2(t) - \cos(t) - \frac{3}{4} = 0$

$(\cos(t) - 1\frac{1}{2})(\cos(t) + \frac{1}{2}) = 0$

$\cos(t) = 1\frac{1}{2} \vee \cos(t) = -\frac{1}{2}$

$t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $C(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = -\frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $D(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

f $x = \cos^2(t) - \cos(t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x^2$ geeft $\sin(t) = (\cos^2(t) - \cos(t))^2$.

Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = (\cos^2(x) - \cos(x))^2$.

De optie snijpunt geeft $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x = 2{,}182...$ en $y = 0{,}818...$

Dus $E(2{,}18; 0{,}82)$.

Bladzijde 225

22 **a** Stel $x_A = a$, dan is $x_B = -a$.

$f(a) = g(-a)$ geeft $e^{\frac{1}{2}a} = e^{-a-1}$

$\frac{1}{2}a = -a - 1$

$1\frac{1}{2}a = -1$

$a = -\frac{2}{3}$

$p = f(-\frac{2}{3}) = e^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

b Stel $x_E = 3b$, dan is $x_D = 4b$.

$g(3b) = f(4b)$ geeft $e^{3b-1} = e^{2b}$

$3b - 1 = 2b$

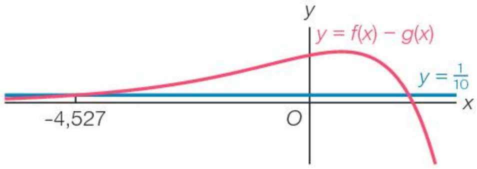
$b = 1$

$q = f(4) = e^2$

c $PQ = f(r) - g(r) = e^{\frac{1}{2}r} - e^{r-1}$

Voer in $y_1 = e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}$ en $y_2 = \frac{1}{10}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -4{,}527$.



$PQ < \frac{1}{10}$ geeft $r < -4{,}527$

d $f(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = e^{x-1}$

$\frac{1}{2}x = x - 1$

$-\frac{1}{2}x = -1$

$x = 2$

$$O(V) = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 (e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1})\,dx = \left[2\,e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}\right]_0^2 = 2e - e - (2 - e^{-1}) = e - 2 + \frac{1}{e}$$

e $$I(L) = \pi\int_0^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx = \pi\int_0^2 ((e^{\frac{1}{2}x})^2 - (e^{x-1})^2)\,dx = \pi\int_0^2 (e^x - e^{2x-2})\,dx$$

$$= \pi\left[e^x - \tfrac{1}{2}e^{2x-2}\right]_0^2 = \pi(e^2 - \tfrac{1}{2}e^2 - (e^0 - \tfrac{1}{2}e^{-2})) = \pi\left(\tfrac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{1}{2\,e^2}\right)$$

23 **a** $f_p(x) = \dfrac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot(2px+p) - (px^2+px+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2px^3 + px^2 + 2px + p - 2px^3 - 2px^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-px^2 + (2p-2)x + p}{(x^2+1)^2}$$

b $f_2(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_2'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}$

$f_2'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^2 - x - 1 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$x_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ geeft $x_A + x_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1$

Dus $x_A + x_B = 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f_4(x) = \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_4'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f_4'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 6x + 4 = 0$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$

$x = \dfrac{3 + 5}{4} = 2 \vee x = \dfrac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$

$f_4(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1 - 2 + 1}{\frac{1}{4} + 1} = 0$, dus $A(-\frac{1}{2}, 0)$.

$f_4(2) = \dfrac{16 + 8 + 1}{4 + 1} = 5$, dus $B(2, 5)$.

$AB = \sqrt{(2 - -\frac{1}{2})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{31\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$

d $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_1'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

$f_1'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

$f_1(-1) = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$, dus $A(-1, \frac{1}{2})$.

$f_1(1) = \dfrac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = 1\frac{1}{2}$, dus $B(1, 1\frac{1}{2})$.

Dus $y_B = 1\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot y_A$.

e $f_{-3}(x) = \dfrac{-3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_{-3}'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2}$

$f_{-3}'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$x = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee x = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

$f_{-3}(-\frac{1}{3}) = 1\frac{1}{2}$, dus $A(-\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2})$ en $OA = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{85}$

$f_{-3}(3) = -3\frac{1}{2}$, dus $B(3, -3\frac{1}{2})$ en $OB = \sqrt{3^2 + (-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$

Dus $OB = \frac{1}{2}\sqrt{85} = 3 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{85} = 3 \cdot OA$.

f $\lim\limits_{x \to \infty} f_p(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p + \frac{p}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{p + 0 + 0}{1 + 0} = p$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = p$.

$f_p(2) = p$ geeft $\dfrac{4p + 2p + 1}{5} = p$

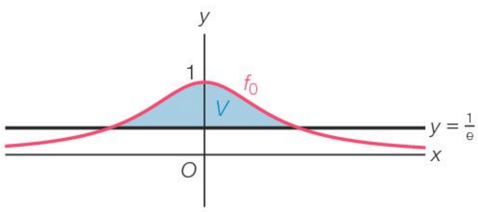
$6p + 1 = 5p$

$p = -1$

g $f_0(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ geeft $x^2 + 1 = \dfrac{1}{y}$

$x^2 = \dfrac{1}{y} - 1$



$$I(L) = \pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\,dy = \pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = \pi\left[\ln(y) - y\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \pi\left(0 - 1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right) = \pi\left(-1 + 1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

24 **a** $f_{p+1}(x) = (x - (p+1))^2 + p + 1 - 2 = (x - (p+1))^2 + p - 1$
De top van de grafiek van f_{p+1} is het punt $(p + 1, p - 1)$.
$x = p + 1$ geeft $f_p(p + 1) = (p + 1 - p)^2 + p - 2 = 1^2 + p - 2 = p - 1$
Dus voor elke p ligt de top van de grafiek van f_{p+1} op de grafiek van f_p.

b De top $(p, p - 2)$ van de grafiek van f_p ligt op k: $y = ax + b$.
$x = p$ en $y = p - 2$ geeft k: $y = x - 2$, dus $\text{rc}_k = 1$.
$l \,//\, k$, dus $\text{rc}_l = \text{rc}_k = 1$.
Er is gegeven dat l evenwijdig is met k, en dat l de grafieken van f_p raakt.
Dus l raakt de grafiek van f_0.
$f_0(x) = x^2 - 2$ geeft $f_0'(x) = 2x$
$f_0'(x) = 1$ geeft $2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
$f_0(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 2 = -1\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = x + b \\ \text{door } (\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = -1\frac{3}{4} \\ b = -2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus l: $y = x - 2\frac{1}{4}$.

c $f_1(x) = (x - 1)^2 + 1 - 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 - 2 = x^2 - 2x$
$f_2(x) = (x - 2)^2 + 2 - 2 = x^2 - 4x + 4$
$f_3(x) = (x - 3)^2 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 9 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 10$
$f_1(x) = f_2(x)$ geeft $x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4$
$2x = 4$
$x = 2$
$f_1(x) = f_3(x)$ geeft $x^2 - 2x = x^2 - 6x + 10$
$4x = 10$
$x = 2\frac{1}{2}$
$f_2(x) = f_3(x)$ geeft $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 10$
$2x = 6$
$x = 3$

$$O(V) = \int_2^{2\frac{1}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (f_3(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_2^{2\frac{1}{2}} (x^2 - 2x - (x^2 - 4x + 4))\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (x^2 - 6x + 10 - (x^2 - 4x + 4))\,\mathrm{d}x = \int_2^{2\frac{1}{2}} (2x - 4)\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (-2x + 6)\,\mathrm{d}x$$
$$= [x^2 - 4x]_2^{2\frac{1}{2}} + [-x^2 + 6x]_{2\frac{1}{2}}^3 = 6\tfrac{1}{4} - 10 - (4 - 8) + (-9 + 18 - (-6\tfrac{1}{4} + 15)) = \tfrac{1}{2}$$

25 **a** $L = AB = f(p) - g(p) = (p^2 + 2p) \cdot 2^{-p} - (p^2 - p) \cdot 2^{-p} = (p^2 + 2p - p^2 + p) \cdot 2^{-p} = 3p \cdot 2^{-p}$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 3 \cdot 2^{-p} + 3p \cdot 2^{-p} \cdot \ln(2) \cdot -1 = (3 - 3p\ln(2)) \cdot 2^{-p}$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $(3 - 3p\ln(2)) \cdot 2^{-p} = 0$
$3 - 3p\ln(2) = 0$
$3p\ln(2) = 3$
$p = \frac{1}{\ln(2)}$

Dus de lengte van het lijnstuk AB is maximaal voor $p = \frac{1}{\ln(2)}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Stel $x_C = r$, dan is $x_D = r + 3$.

$f(r) = f(r+3)$ geeft $(r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} = ((r+3)^2 + 2(r+3)) \cdot 2^{-(r+3)}$

$(r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} = (r^2 + 6r + 9 + 2r + 6) \cdot 2^{-r} \cdot \frac{1}{8}$

$8(r^2 + 2r) = r^2 + 8r + 15$

$8r^2 + 16r = r^2 + 8r + 15$

$7r^2 + 8r - 15 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 7 \cdot -15 = 484$

$r = \dfrac{-8 + 22}{14} = 1 \vee r = \dfrac{-8 - 22}{14} = -2\frac{1}{7}$

vold. niet

$q = f(1) = (1 + 2) \cdot 2^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Bladzijde 227

26 **a** $L = AB = f(p) - g(p) = \sqrt{25 - p^2} - (\frac{3}{4}p - 4) = \sqrt{25 - p^2} - \frac{3}{4}p + 4$

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = \dfrac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p - \frac{3}{4} = -\dfrac{p}{\sqrt{25 - p^2}} - \frac{3}{4}$

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\dfrac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = -\frac{3}{4}$

$4p = -3\sqrt{25 - p^2}$

kwadrateren geeft

$16p^2 = 9(25 - p^2)$

$16p^2 = 225 - 9p^2$

$25p^2 = 225$

$p^2 = 9$

$p = 3 \quad \vee \quad p = -3$

vold. niet

De maximale lengte van het lijnstuk AB is $\sqrt{25 - (-3)^2} - \frac{3}{4} \cdot -3 + 4 = 10\frac{1}{4}$.

b $L = AC = h(p) - f(p) = -\frac{4}{3}p + 10 - \sqrt{25 - p^2}$

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = -\frac{4}{3} - \dfrac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p = -\frac{4}{3} + \dfrac{p}{\sqrt{25 - p^2}}$

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\dfrac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = \frac{4}{3}$

$3p = 4\sqrt{25 - p^2}$

kwadrateren geeft

$9p^2 = 16(25 - p^2)$

$9p^2 = 400 - 16p^2$

$25p^2 = 400$

$p^2 = 16$

$p = 4 \vee p = -4$

vold. niet

De minimale lengte van het lijnstuk AC is $-\frac{4}{3} \cdot 4 + 10 - \sqrt{25 - 4^2} = 1\frac{2}{3}$.

27 **a** $f(x) = (x^2 + x)\mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = (2x + 1) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + x) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 3x + 1)\mathrm{e}^x$

$g(x) = (x^2 - x)\mathrm{e}^x$ geeft $g'(x) = (2x - 1) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 - x) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$

$\mathrm{rc}_k = f'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$

$\mathrm{rc}_l = g'(0) = -1 \cdot \mathrm{e}^0 = -1$

$\mathrm{rc}_k \cdot \mathrm{rc}_l = 1 \cdot -1 = -1$

Dus k en l snijden elkaar loodrecht.

b $g'(x) = (x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$ geeft $g''(x) = (2x + 1) \cdot \mathrm{e}^x + (x^2 + x - 1) \cdot \mathrm{e}^x = (x^2 + 3x)\mathrm{e}^x$

$g'(-2) = (4 - 2 - 1)\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2} > 0$

$g''(-2) = (4 - 6)\mathrm{e}^{-2} = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$

Dus in A is sprake van afnemende stijging.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)\,e^x$ geeft $f''(x) = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 4)\,e^x$

$f''(x) = 0$ geeft $x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x + 1)(x + 4) = 0$

$x = -1 \vee x = -4$

Dus $x_B = -4$ en $x_C = -1$.

$g''(x) = 0$ geeft $x^2 + 3x = 0$

$x(x + 3) = 0$

$x = 0 \vee x = -3$

Dus $x_D = -3$ en $x_E = 0$.

$x_C - x_B = -1 - -4 = 3$

$x_E - x_D = 0 - -3 = 3$

Dus $x_C - x_B = x_E - x_D$.

d $L = FG = g(p) - f(p) = (p^2 - p)\,e^p - (p^2 + p)\,e^p = (p^2 - p - p^2 - p)\,e^p = -2p\,e^p$

$\dfrac{dL}{dp} = -2 \cdot e^p - 2p \cdot e^p = (-2p - 2)\,e^p$

$\dfrac{dL}{dp} = 0$ geeft $-2p - 2 = 0$

$-2p = 2$

$p = -1$

De maximale lengte van het lijnstuk FG is $-2 \cdot -1 \cdot e^{-1} = \dfrac{2}{e}$.

e $H'(x) = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b)\,e^x$

Dus de primitieven van de functies $h(x) = (px + q)\,e^x$ zijn van de vorm

$H(x) = (ax + b)\,e^x + c$ met $p = a$ en $q = a + b$.

f $O(V) = \int_{-3}^{0} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-3}^{0} ((x^2 - x)\,e^x - (x^2 + x)\,e^x)\,dx = \int_{-3}^{0} (x^2 - x - x^2 - x)\,e^x\,dx = \int_{-3}^{0} -2x\,e^x\,dx$

$h(x) = (px + q)\,e^x$ met $p = -2$ en $q = 0$ geeft $h(x) = -2\,e^x$.

Uit e volgt dat $H(x) = (ax + b)\,e^x + c$ met $a = p = -2$ en $b = q - a = 0 - -2 = 2$.

Dus $O(V) = \int_{-3}^{0} -2x\,e^x\,dx = \left[(-2x + 2)\,e^x\right]_{-3}^{0} = 2\,e^0 - (6 + 2)\,e^{-3} = 2 - \dfrac{8}{e^3}$.

28 **a** $f(x) = 0$ geeft $4 - \sqrt{2x} = 0$

$\sqrt{2x} = 4$

$2x = 16$

$x = 8$

$O(V) = \int_{0}^{8} (4 - \sqrt{2x})\,dx = \int_{0}^{8} (4 - (2x)^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^8 = \left[4x - \frac{2}{3}x\sqrt{2x}\right]_0^8 = 32 - \frac{16}{3}\sqrt{16} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}$

b $A = p \cdot f(p) = p(4 - \sqrt{2p}) = 4p - p\sqrt{2p}$

$\dfrac{dA}{dp} = 4 - 1 \cdot \sqrt{2p} - p \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2p}} \cdot 2 = 4 - \sqrt{2p} - \dfrac{p}{\sqrt{2p}}$

$\dfrac{dA}{dp} = 0$ geeft $4 - \sqrt{2p} - \dfrac{p}{\sqrt{2p}} = 0$

$4\sqrt{2p} - 2p - p = 0$

$4\sqrt{2p} = 3p$

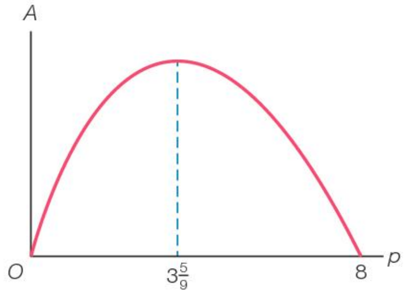
kwadrateren geeft

$32p = 9p^2$

$p = 0 \;\vee\; 32 = 9p$

vold. niet $p = 3\frac{5}{9}$

© Noordhoff Uitgevers bv



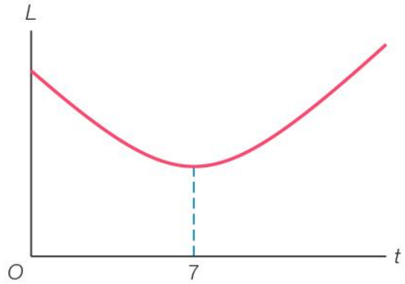
Dus voor $p = 3\frac{5}{9}$ is de oppervlakte van rechthoek $OPQR$ maximaal.

c $S(8, 4)$ en $T(t, 4 - \sqrt{2t})$ geeft

$$L = \sqrt{(t-8)^2 + (4 - \sqrt{2t} - 4)^2} = \sqrt{t^2 - 16t + 64 + 2t} = \sqrt{t^2 - 14t + 64}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t^2 - 14t + 64}} \cdot (2t - 14) = \frac{t - 7}{\sqrt{t^2 - 14t + 64}}$$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$ geeft $t - 7 = 0$, dus $t = 7$.



Het minimum van L is $\sqrt{49 - 98 + 64} = \sqrt{15}$.

Bladzijde 228

29 **a** $f_p(x) = p\sqrt{x} - \ln(x)$ geeft

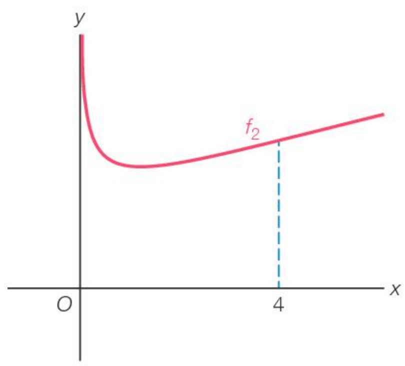
$$f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} \text{ en}$$

$$f_p''(x) = -\tfrac{1}{4}px^{-1\frac{1}{2}} + x^{-2} = -\frac{p}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$f_p''(4) = 0 \text{ geeft } -\frac{p}{16\sqrt{4}} + \frac{1}{16} = 0$$

$$-\frac{p}{32} = -\frac{1}{16}$$

$$p = 2$$



Dus voor $p = 2$ gaat de grafiek van f_p bij $x = 4$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

b $f_p'(x) = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{p\sqrt{x}}{2x} - \dfrac{2}{2x} = \dfrac{p\sqrt{x} - 2}{2x}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $p\sqrt{x} - 2 = 0$

$p\sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} = \dfrac{2}{p}$

$x = \dfrac{4}{p^2}$ (met $p > 0$)

$f_p\left(\dfrac{4}{p^2}\right) = 2 - \ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right)$

Het punt $\left(\dfrac{4}{p^2}, 2 - \ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right)\right)$ ligt op de grafiek van $g(x) = 2\ln(x) - 4$ geeft

$2\ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right) - 4 = 2 - \ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right)$

$3\ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right) = 6$

$\ln\left(\dfrac{4}{p^2}\right) = 2$

$\dfrac{4}{p^2} = e^2$

$p^2 = \dfrac{4}{e^2}$

$p = \dfrac{2}{e} \vee p = -\dfrac{2}{e}$

vold. niet

Dus voor $p = \dfrac{2}{e}$.

30 **a** $f(x) = \dfrac{4x - 3}{2x + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2x + 1) \cdot 4 - (4x - 3) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \dfrac{8x + 4 - 8x + 6}{(2x + 1)^2} = \dfrac{10}{(2x + 1)^2}$

$\text{rc}_k = f'(-3) = \dfrac{10}{(-6 + 1)^2} = \dfrac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\text{rc}_l = f'(2) = \dfrac{10}{(4 + 1)^2} = \dfrac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\text{rc}_k = \text{rc}_l$, dus k en l zijn evenwijdig.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \end{array}\right\} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1$

$\frac{4}{5} + b = 1$

$b = \frac{1}{5}$

Dus $l\colon y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ oftewel $l\colon 2x - 5y + 1 = 0$.

$d(k, l) = d(A, l) = \dfrac{|2 \cdot -3 - 5 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{29}} = \dfrac{20}{\sqrt{29}} = \frac{20}{29}\sqrt{29}$

b $f(x) = 0$ geeft $4x - 3 = 0$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$

Dus het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is $C(\frac{3}{4}, 0)$.

Stel $m\colon y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1 - 3}{2 - -3} = -\frac{2}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \end{array}\right\} -\frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1$

$-\frac{4}{5} + b = 1$

$b = 1\frac{4}{5}$

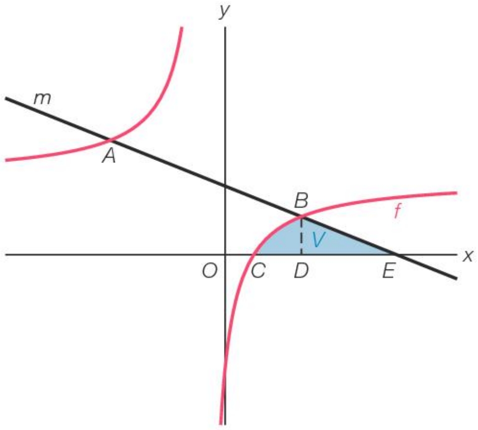
$m\colon y = -\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5}$ snijden met de x-as geeft $-\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5} = 0$

$-\frac{2}{5}x = -1\frac{4}{5}$

$x = 4\frac{1}{2}$

Dus het snijpunt van m met de x-as is $E(4\frac{1}{2}, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv



$$f(x) = \frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-2-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$$

$$O(V) = \int_{\frac{3}{4}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + O(\triangle DEB) = \int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(2 - \frac{5}{2x+1}\right)\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2} \cdot DE \cdot BD$$

$$= \left[2x - 5 \cdot \tfrac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_{\frac{3}{4}}^{2} + \tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot 1 = 4 - 2\tfrac{1}{2}\ln(5) - (1\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}\ln(2\tfrac{1}{2})) + 1\tfrac{1}{4}$$

$$= 4 - 2\tfrac{1}{2}\ln(5) - 1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\ln(2\tfrac{1}{2}) + 1\tfrac{1}{4} = 3\tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2\frac{1}{2}}{5}\right) = 3\tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2})$$

$$= 3\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{1}{2}\ln(2)$$

31 **a** $f(x) = g_a(x)$ geeft $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = a\sqrt{x}$

$$ax = 4$$

$$x = \frac{4}{a}$$

$f(x) = h_a(x)$ geeft $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = 4a\sqrt{x}$

$$4ax = 4$$

$$x = \frac{1}{a}$$

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{a}}(h_a(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}}(f(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}}(4a\sqrt{x} - a\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}}\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - a\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}}(4x^{-\frac{1}{2}} - ax^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x = \left[2ax^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}ax^{1\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}}$$

$$= \left[2ax\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} = 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} - 0 + 8\sqrt{\frac{4}{a}} - \tfrac{2}{3}a \cdot \frac{4}{a}\sqrt{\frac{4}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{2}{3}a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{a}} + 16\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 12\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - 7\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 5\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$O(V) = 4$ geeft $\tfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{1}{a}} = 4$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = 4 \cdot \tfrac{3}{16}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \tfrac{3}{4}$$

$$\frac{1}{a} = \tfrac{9}{16}$$

$$a = \tfrac{16}{9}$$

Dus voor $a = 1\tfrac{7}{9}$.

b $O(V_1) = \int_0^{\frac{1}{a}} (h_a(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[2ax^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{a}} = 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{a}}$

$O(V_2) = O(V) - O(V_1) = 5\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - 2\sqrt{\frac{1}{a}} = 3\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$

$O(V_1) : O(V_2) = 2\sqrt{\frac{1}{a}} : 3\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 2 : 3\tfrac{1}{3} = 3 : 5$

32 **a** $f(x) = g_a(x)$ geeft $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

$2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = a$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2}a$

$\tfrac{1}{2}x = \ln(\tfrac{1}{2}a)$

$x = 2\ln(\tfrac{1}{2}a)$

$O(V) = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (g_a(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x$

$= \left[ax - 4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} = 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4\,\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4)$

$= 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4 \cdot \tfrac{1}{2}a + 4 = 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 2a + 4$

$O(V) = 10$ geeft $2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 2a + 4 = 10$

Voer in $y_1 = 2x\ln(\tfrac{1}{2}x) - 2x + 4$ en $y_2 = 10$.
De optie snijpunt geeft $x = 7{,}9346...$
Dus $a \approx 7{,}935$.

b $I(L) = \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((g_a(x))^2 - (f(x))^2)\,\mathrm{d}x =$

$= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})^2 - (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

$= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \pi\left[a^2x - 4a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)}$

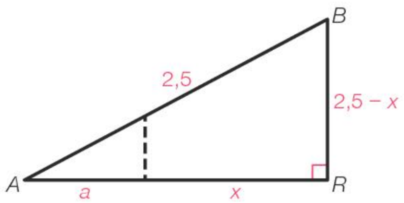
$= \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4a\,\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4a)) = \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4a \cdot \tfrac{1}{2}a + 4a)$

$= \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 2a^2 + 4a)$

Voer in $y_1 = \pi(2x^2\ln(\tfrac{1}{2}x) - 2x^2 + 4x)$ en $y_2 = 400$.
De optie snijpunt geeft $x = 9{,}2351...$
Dus $a \approx 9{,}235$.

Bladzijde 229

33 $AQ + BR = 2{,}5$, dus $BR = 2{,}5 - AQ = 2{,}5 - x$
In $\triangle ARB$ is $AR^2 + BR^2 = AB^2$



$(a + x)^2 + (2{,}5 - x)^2 = 2{,}5^2$

$(a + x)^2 + 6{,}25 - 5x + x^2 = 6{,}25$

$(a + x)^2 = 5x - x^2$

$a + x = \sqrt{5x - x^2}$

$a = -x + \sqrt{5x - x^2}$

$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{5x - x^2}} \cdot (5 - 2x) = -1 + \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

$\frac{da}{dx} = 0$ geeft $-1 + \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}} = 0$

$\frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}} = 1$

$2\sqrt{5x - x^2} = 5 - 2x$

kwadrateren geeft

$4(5x - x^2) = 25 - 20x + 4x^2$

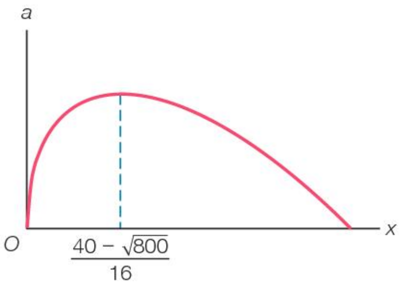
$20x - 4x^2 = 25 - 20x + 4x^2$

$8x^2 - 40x + 25 = 0$

$D = (-40)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25 = 800$

$x = \frac{40 + \sqrt{800}}{16} \vee x = \frac{40 - \sqrt{800}}{16}$

vold. niet



De onderkant van de garagedeur komt maximaal

$-\frac{40 - \sqrt{800}}{16} + \sqrt{5 \cdot \frac{40 - \sqrt{800}}{16} - \left(\frac{40 - \sqrt{800}}{16}\right)^2} \approx 1{,}04$ meter naar buiten.

34 **a** $\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}AP}{0{,}3}$

$\frac{1}{2}AP = 0{,}3\cos(\alpha)$

$AP = 0{,}6\cos(\alpha)$

$AB = 0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha)$

De cosinusregel in $\triangle ABR$ geeft

$BR^2 = AR^2 + AB^2 - 2 \cdot AR \cdot AB \cdot \cos(\angle BAR)$

$BR^2 = 1{,}2^2 + (0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot 1{,}2 \cdot (0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha)$

$BR^2 = 1{,}44 + 0{,}36 + 0{,}72\cos(\alpha) + 0{,}36\cos^2(\alpha) - 1{,}44\cos(\alpha) - 1{,}44\cos^2(\alpha)$

$BR^2 = 1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)$

$BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}$

b $BR > 1$ geeft $\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)} > 1$

Voer in $y_1 = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(x) - 1{,}08\cos^2(x)}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 0{,}940...$

Dus de lengte van het uitgerolde doek is meer dan 1 meter bij een hoek α die groter is dan 0,94 rad.

c $L = BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}$ geeft

$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}} \cdot (0{,}72\sin(\alpha) - 2{,}16\cos(\alpha) \cdot -\sin(\alpha))$

$= \frac{0{,}36\sin(\alpha) + 1{,}08\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}}$

$\frac{dL}{d\alpha} = 0$ geeft $0{,}36\sin(\alpha) + 1{,}08\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0$

$0{,}36\sin(\alpha)(1 + 3\cos(\alpha)) = 0$

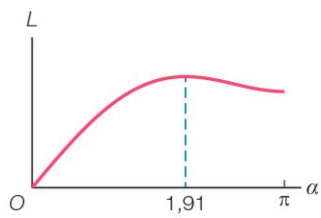
$0{,}36\sin(\alpha) = 0 \vee 1 + 3\cos(\alpha) = 0$

$\sin(\alpha) = 0 \vee \cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$

$\alpha = k \cdot \pi \vee \alpha \approx 1{,}91 + k \cdot 2\pi \vee \alpha \approx -1{,}91 + k \cdot 2\pi$

Schets van L, zie hiernaast.

Dus de lengte BR is maximaal bij $a \approx 1{,}91$ rad.



Bladzijde 230

35 **a** E_v is evenredig met $M_v^{-0,13}$, dus $E_v = aM_v^{-0,13}$.
$M_v = 0{,}2$ en $E_v = 3{,}3$ geeft $a \cdot 0{,}2^{-0,13} = 3{,}3$
$a = 3{,}3 \cdot 0{,}2^{0,13} \approx 2{,}68$

b Uit de gegevens van het konijn volgt $a \cdot 2^b = 2{,}5$ oftewel $a = 2{,}5 \cdot 2^{-b}$.
Uit de gegevens van de neushoorn volgt $a \cdot 2500^b = 0{,}24$ oftewel $a = 0{,}24 \cdot 2500^{-b}$.
Voer in $y_1 = 2{,}5 \cdot 2^{-x}$ en $y_2 = 0{,}24 \cdot 2500^{-x}$.
De optie snijpunt geeft $x = -0{,}328...$ en $y = 3{,}139...$
Dus $a \approx 3{,}14$ en $b \approx -0{,}33$.

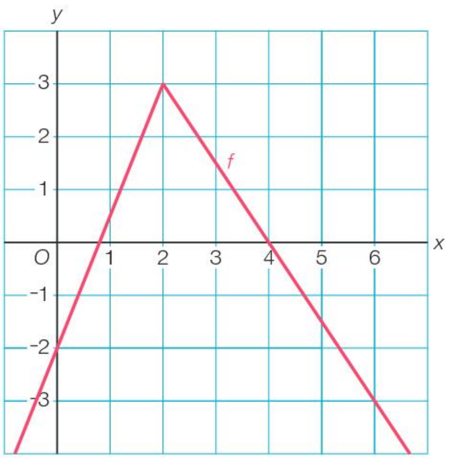
c $E_v = E_l$ geeft $2{,}7M_v^{-0,13} = 3{,}2M_l^{-0,33}$
Voer in $y_1 = 2{,}7x^{-0,13}$ en $y_2 = 3{,}2x^{-0,33}$.
De optie snijpunt geeft $x = 2{,}33...$
Dus bij ongeveer 2,3 kg.

d Neem in de formule van de vogels $2M_v$ voor M_v.
$E_v = 2{,}7(2M_v)^{-0,13} = 2{,}7 \cdot 2^{-0,13} \cdot M_v^{-0,13} = 2^{-0,13} \cdot 2{,}7M_v^{-0,13}$
Dus $p = 2^{-0,13.}$
Neem in de formule van de landdieren $2M_l$ voor M_l.
$E_l = 3{,}2(2M_l)^{-0,33} = 3{,}2 \cdot 2^{-0,33} \cdot M_l^{-0,33} = 2^{-0,33} \cdot 3{,}2M_l^{-0,33}$
Dus $q = 2^{-0,33}$.
$p : q = 2^{-0,13} : 2^{-0,33}$
$p : q = (2^{-0,13} : 2^{-0,33}) : 1$
$p : q = 2^{0,2} : 1$
$p : q = 2^{\frac{1}{5}} : 1$
$p : q = \sqrt[5]{2} : 1$

16 Examentraining

Bladzijde 231

36 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 - 4 + 2x = 2\frac{1}{2}x - 2$ als $4 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 2$.
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 + 4 - 2x = -1\frac{1}{2}x + 6$ als $4 - 2x < 0$, dus als $x > 2$.



37 $f(x) = \cos(\pi(x - 3))$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi(x - 3)) + c$

© Noordhoff Uitgevers bv

38 $x^3 + 10x = 7x^2$
$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x(x^2 - 7x + 10) = 0$
$x(x-2)(x-5) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

39 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^2} = x + 2x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 - 3x^{-2\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \dfrac{3}{1} = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

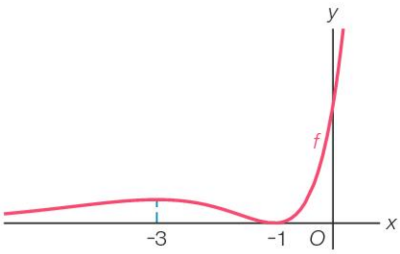
Dus k: $y = -2x + 5$.

40 $y = a + b\sin(c(x - d))$
$a = \dfrac{5 + -1}{2} = 2$
$5 - 2 = 3$, dus $b = -3$.
periode $= 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.
Dalend door de evenwichtsstand voor $x = \pi$, dus $d = \pi$.
Dus $y = 2 - 3\sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.

$y = a + b\cos(c(x - d))$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = 1\frac{1}{2}$.
$(\frac{2}{3}\pi, 5)$ is een hoogste punt, dus $d = \frac{2}{3}\pi$.
Dus $y = 2 + 3\cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

41 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 8 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 8 = 0$
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$
Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) \wedge y = -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t)$.
Het midden Q van $P(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t), -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t))$ en $A(10, 0)$ is
$Q(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) + 10), \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t) + 0)) = Q(6\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \cos(t), -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sin(t))$.
Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = 1\frac{1}{4}$.

42 $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\,e^x$ geeft $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 3)\,e^x$
$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 4x + 3 = 0$
$(x+1)(x+3) = 0$
$x = -1 \vee x = -3$



max. is $f(-3) = (9 - 6 + 1)\,e^{-3} = \dfrac{4}{e^3}$
min. is $f(-1) = (1 - 2 + 1)\,e^{-1} = 0$

43 $x(t) = 0$ geeft $4 - t^2 = 0$

$t^2 = 4$

$t = 2 \vee t = -2$

$t = -2$ geeft het punt $(0, -2)$, dus voldoet niet.

$t = 2$ geeft het punt $(0, 2)$, dus voldoet.

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus de gevraagde baansnelheid is $v(2) = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97}$.

$v(t) = \sqrt{(-2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9} = \sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}$ geeft

$a(t) = v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}} \cdot (36t^3 - 28t) = \dfrac{18t^3 - 14t}{\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}}$

De gevraagde baanversnelling is $a(2) = \dfrac{18 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2}{\sqrt{9 \cdot 2^4 - 14 \cdot 2^2 + 9}} = \dfrac{116}{\sqrt{97}}$.

44 $\left.\begin{array}{l} \text{twee oplossingen als } D > 0 \\ D = (-5)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = 25 - 12p \end{array}\right\}$ $25 - 12p > 0$

$-12p > -25$

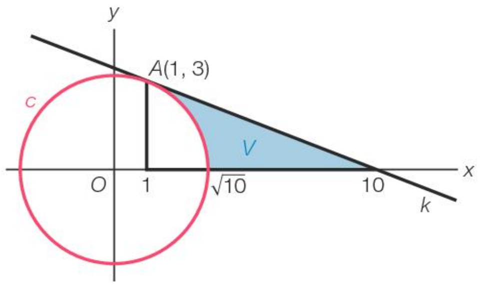
$p < 2\frac{1}{12}$

45 $\vec{n}_k = \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus k: $x + 3y = c$.

k door $A(1, 3)$ geeft $c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$.

Dus k: $x + 3y = 10$.

k snijden met de x-as geeft $x = 10$.



$x^2 + y^2 = 10$ oftewel $y^2 = 10 - x^2$

$I(L) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 - \pi \int_1^{\sqrt{10}} y^2 \, dx = 27\pi - \pi \int_1^{\sqrt{10}} (10 - x^2) \, dx = 27\pi - \pi\left[10x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{10}}$

$= 27\pi - \pi(10\sqrt{10} - \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{10}) + \pi(10 - \frac{1}{3}) = 27\pi - \pi \cdot 6\frac{2}{3}\sqrt{10} + \pi \cdot 9\frac{2}{3} = \pi(36\frac{2}{3} - 6\frac{2}{3}\sqrt{10})$

Bladzijde 232

46 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 11x - 7y + 24 = 0 \end{cases}$ $-$

$9x + 9y - 27 = 0$

$x + y = 3$

$\left.\begin{array}{l} y = 3 - x \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right\}$ $x^2 + (3 - x)^2 - 2x + 2(3 - x) - 3 = 0$

$x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x + 6 - 2x - 3 = 0$

$2x^2 - 10x + 12 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2 \vee x = 3$

$x = 2$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(2, 1)$.

$x = 3$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(3, 0)$.

Dus $A(2, 1)$ en $B(3, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

47 $f_p(x) = \dfrac{2x}{x^2+p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x^2+p)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(x^2+p)^2} = \dfrac{2x^2+2p-4x^2}{(x^2+p)^2} = \dfrac{-2x^2+2p}{(x^2+p)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2p = 0$

$x^2 = p$

$x = \sqrt{p} \vee x = -\sqrt{p}$

$f(\sqrt{p}) = \dfrac{2\sqrt{p}}{p+p} = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ en $f(-\sqrt{p}) = \dfrac{-2\sqrt{p}}{p+p} = -\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

Dus $A\left(\sqrt{p}, \dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$ en $B\left(-\sqrt{p}, -\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

$AB = \sqrt{(2\sqrt{p})^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{p}}\right)^2} = \sqrt{4p + \dfrac{4}{p}}$

$AB = \sqrt{10}$ geeft $4p + \dfrac{4}{p} = 10$

$4p^2 + 4 = 10p$

$4p^2 - 10p + 4 = 0$

$2p^2 - 5p + 2 = 0$

$D = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9$

$p = \dfrac{5+3}{4} = 2 \vee p = \dfrac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

48 $x^4 + 9 = 6\frac{1}{4}x^2$

$x^4 - 6\frac{1}{4}x^2 + 9 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$u^2 - 6\frac{1}{4}u + 9 = 0$

$4u^2 - 25u + 36 = 0$

$D = (-25)^2 - 4\cdot 4\cdot 36 = 49$

$u = \dfrac{25+7}{8} = 4 \vee u = \dfrac{25-7}{8} = 2\frac{1}{4}$

$x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{4}$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

49 $y = \frac{1}{4}\cdot(3x)^{-2}\cdot\dfrac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4}\cdot 3^{-2}\cdot x^{-2}\cdot 8\cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$

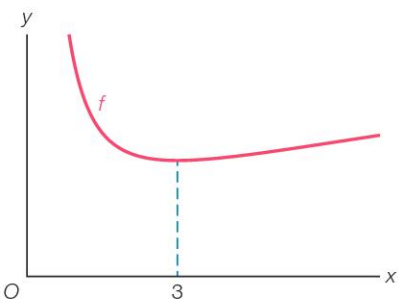
50 $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{9}{2x^2\cdot\sqrt{x}} = \dfrac{x^2-9}{2x^2\cdot\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

vold. niet



min. is $f(3) = \dfrac{9+3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{12}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

51 $f(x) = 2$ geeft $1 + \tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) = 2$

$$\tan(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}\pi) = 1$$
$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$
$$x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi$

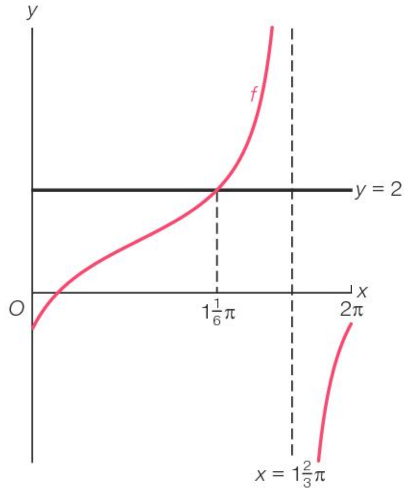
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{2}{3}\pi$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



$f(x) > 2$ geeft $1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$

52 Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$(x-1)(x-5) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 5$$

Dus $A(1, 0)$ en $B(5, 0)$.

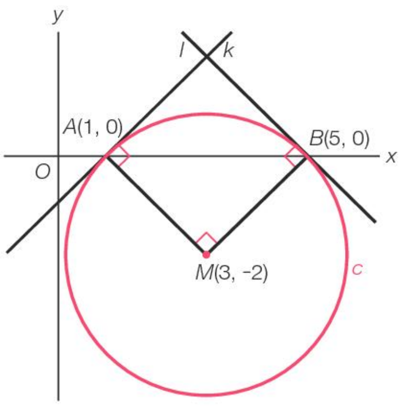
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 5 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 5 = 0$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$

Dus het middelpunt van c is $M(3, -2)$.



$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Omdat ook $AM \perp k$ en $BM \perp l$, is $k \perp l$.

Dus de gevraagde hoek is 90°.

© Noordhoff Uitgevers bv

53 $\ln^2(x) - 8\ln(x) + 12 = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 - 8u + 12 = 0$
$(u-2)(u-6) = 0$
$u = 2 \vee u = 6$
$\ln(x) = 2 \vee \ln(x) = 6$
$x = \mathrm{e}^2 \vee x = \mathrm{e}^6$

54 $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$, dus $v(t) = \sqrt{(2t - \frac{1}{2})^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{4t^2 - 2t + \frac{1}{4} + 4t^2 - 8t + 4} = \sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}$

en $v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}} \cdot (16t - 10) = \dfrac{8t - 5}{\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}}$.

$v'(t) = 0$ geeft $8t - 5 = 0$, dus $t = \frac{5}{8}$.

$t = \frac{5}{8}$ geeft het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.

Dus de baansnelheid is minimaal in het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.

55 $a(t) = 0{,}12t^2$ geeft $v(t) = 0{,}04t^3 + v(0)$
$v(0) = 0$ geeft $v(t) = 0{,}04t^3$
$v(t) = 0{,}04t^3$ geeft $s(t) = 0{,}01t^4 + s(0)$
$s(0) = 0$ geeft $s(t) = 0{,}01t^4$
$v(5) = 0{,}04 \cdot 5^3 = 5$
$s(5) = 0{,}01 \cdot 5^4 = 6{,}25$
De eerste vijf seconden wordt 6,25 meter afgelegd.
De tweede vijf seconden wordt $5 \cdot 5 = 25$ meter afgelegd.
Dus in de eerste tien seconden wordt 31,25 meter afgelegd.

56 Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 4p$.
$f(p) = f(4p)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{4p} - 4p$
$4\sqrt{p} - p = 8\sqrt{p} - 4p$
$3p = 4\sqrt{p}$
kwadrateren geeft
$9p^2 = 16p$
$p = 0 \vee 9p = 16$
$p = 0 \;\vee\; p = \frac{16}{9}$
vold. niet
$q = f(\frac{16}{9}) = 4\sqrt{\frac{16}{9}} - \frac{16}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = 3\frac{5}{9}$

Bladzijde 233

57 $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2p} = \dfrac{3}{p}$

$y_{\text{top}} = f_p\left(\dfrac{3}{p}\right) = p \cdot \left(\dfrac{3}{p}\right)^2 - 6 \cdot \dfrac{3}{p} + 2 = \dfrac{9}{p} - \dfrac{18}{p} + 2 = 2 - \dfrac{9}{p}$

$\text{top}\left(\dfrac{3}{p}, 2 - \dfrac{9}{p}\right)$ op de lijn $y = x$ geeft $2 - \dfrac{9}{p} = \dfrac{3}{p}$
$\dfrac{12}{p} = 2$
$p = 6$

58 $(-2, -3)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-2 - 2b + c = -3$ oftewel $2b - c = 1$.
$(6, 5)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-18 + 6b + c = 5$ oftewel $6b + c = 23$.

$$\begin{cases} 2b - c = 1 \\ 6b + c = 23 \end{cases} +$$
$8b = 24$

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ 6b + c = 23 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 18 + c = 23 \\ c = 5 \end{array}$$

Dus $b = 3$ en $c = 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

59 $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}} = a^{-2} \cdot \frac{a^4}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-2} \cdot a^{3\frac{3}{5}} = a^{1\frac{3}{5}}$

60 $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot 3x^2 - (x^3+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2\sqrt{x} \cdot 3x^2 \cdot (\sqrt{x}+1) - (x^3+1)}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{6x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - x^3 - 1}{2(\sqrt{x}+1)^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x}+1)^2 \cdot \sqrt{x}}$

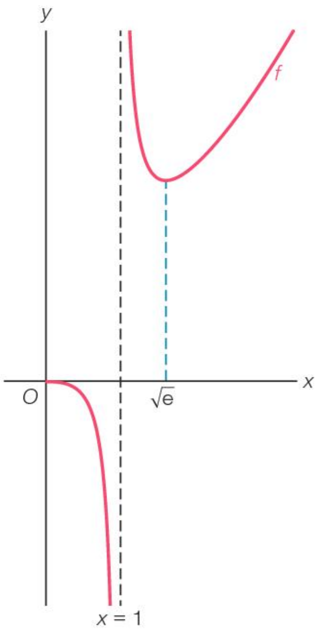
61 $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (\cos(x) + \sin(x)) - (\sin(x) - \cos(x)) \cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{x(\cos(x) + \sin(x)) - 2(\sin(x) - \cos(x))}{x^3} = \frac{(x+2)\cos(x) + (x-2)\sin(x)}{x^3}$

62 Substitutie van $x = 3t + p$ en $y = t + 1$ in $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ geeft
$(3t+p)^2 + (t+1)^2 + 4(3t+p) - 8(t+1) + 10 = 0$
$9t^2 + 6pt + p^2 + t^2 + 2t + 1 + 12t + 4p - 8t - 8 + 10 = 0$
$10t^2 + (6p+6)t + p^2 + 4p + 3 = 0$
$D = (6p+6)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 + 4p + 3) = 36p^2 + 72p + 36 - 40p^2 - 160p - 120 = -4p^2 - 88p - 84$
$D = 0$ geeft $-4p^2 - 88p - 84 = 0$
$p^2 + 22p + 21 = 0$
$(p+1)(p+21) = 0$
$p = -1 \vee p = -21$

63 $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{2x\ln(x) - x}{\ln^2(x)}$

$f'(x) = 0$ geeft $2x\ln(x) - x = 0$
$x(2\ln(x) - 1) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad \ln(x) = \frac{1}{2}$
vold. niet $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$



min. is $f(\sqrt{e}) = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

© Noordhoff Uitgevers bv

64 $f(x) = (2x+4)^3 + e^{2x+4}$ geeft
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2x+4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c = \frac{1}{8}(2x+4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c$

65 $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
$2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 0$
$2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
$-2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$
$\sin(x)(-2\sin(x) + 1) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$
$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

66 Stel $M(p, p-1)$.
l: $y = 2x - 1$ oftewel l: $2x - y - 1 = 0$
$d(M, l) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|2p - p + 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
$|p| = 5$
$p = 5 \vee p = -5$
$p = 5$ geeft $M_1(5, 4)$ en c_1: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5$.
$p = -5$ geeft $M_2(-5, -6)$ c_2: $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 5$.

67 Stel $x_A = p$. Dan is $x_B = p + 4$.
$f(p) = f(p+4)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{p+4} - p - 4$
$4\sqrt{p} = 4\sqrt{p+4} - 4$
$\sqrt{p} = \sqrt{p+4} - 1$
kwadrateren geeft
$p = p + 4 - 2\sqrt{p+4} + 1$
$2\sqrt{p+4} = 5$
$\sqrt{p+4} = 2\frac{1}{2}$
$p + 4 = 6\frac{1}{4}$
$p = 2\frac{1}{4}$
$q = f(2\frac{1}{4}) = 4\sqrt{2\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{4} = 4 \cdot 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$

68 $x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = p$, dus $p = x_{top}$.
$y_{top} = \frac{1}{2}x_{top}{}^2 - x_{top} \cdot x_{top} + 2 = \frac{1}{2}x_{top}{}^2 - x_{top}{}^2 + 2 = -\frac{1}{2}x_{top}{}^2 + 2$
Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Bladzijde 234

69 $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x^3 - 4x$
$(x^2 - 4)\sqrt{x} = x(x^2 - 4)$
$x^2 - 4 = 0 \vee \sqrt{x} = x$
$x^2 = 4 \vee x = x^2$
$x = 2 \vee x = -2 \quad \vee \quad x = 0 \vee x = 1$
vold. niet

70 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \dfrac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 8 \cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$
$\frac{2}{9}x^3 = y$
$x^3 = \frac{9}{2}y$
$x = (\frac{9}{2}y)^{\frac{1}{3}} = (\frac{9}{2})^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 1{,}650...y^{\frac{1}{3}}$
Dus $x = 1{,}65y^{\frac{1}{3}}$.

71 $y = \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \frac{2x^{1\frac{1}{2}}}{x^2+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3) \cdot 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{1\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^{2\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}} - 4x^{2\frac{1}{2}}}{(x^2+3)^2} = \frac{9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$

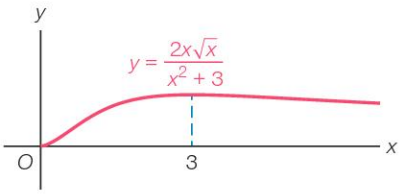
$\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x} = 0$

$(9 - x^2) \cdot \sqrt{x} = 0$

$x^2 = 9 \vee \sqrt{x} = 0$

$x = 3 \;\vee\; x = -3 \vee x = 0$

vold. niet



min. is $f(0) = 0$ en max. is $f(3) = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x\sqrt{x}}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Dus de vergelijking $\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = p$ heeft twee oplossingen als $0 < p < \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

72 $f(x) = x \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi)$ geeft

$f'(x) = 1 \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + x \cdot 3\tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot 3 \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$

$= \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + 9x\tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$

73 $f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x+2) = 1 + {}^3\log(2x - 11)$

${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x - 11)$

${}^3\log(x+2) = {}^3\log(6x - 33)$

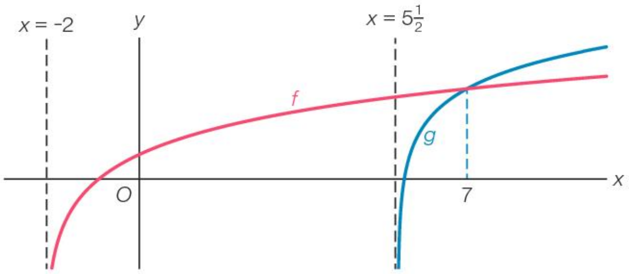
$x + 2 = 6x - 33$

$-5x = -35$

$x = 7$

$x + 2 > 0$ geeft $x > -2$, dus $D_f = \langle -2, \rightarrow\rangle$.

$2x - 11 > 0$ geeft $x > 5\frac{1}{2}$, dus $D_g = \langle 5\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $5\frac{1}{2} < x \leq 7$

74 Stel k: $y = ax + b$ met $a = \frac{-25 - -43}{3 - -3} = \frac{18}{6} = 3$.

$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(-3, -43) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -9 + b = -43 \\ b = -34 \end{array}$

Dus k: $y = 3x - 34$.

k snijden met l geeft $-4 + 2t = 3(3 + 3t) - 34$

$-4 + 2t = 9 + 9t - 34$

$-7t = -21$

$t = 3$

$t = 3$ geeft het snijpunt (12, 2).

© Noordhoff Uitgevers bv

75 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ geeft $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}$

$$\frac{47}{26} = \frac{AC}{18} = \frac{21}{ED}$$

Uit $\frac{47}{26} = \frac{AC}{18}$ volgt $AC = \frac{18 \cdot 47}{26} = 32{,}53...$

$CE = AC - AE = 32{,}53... - 26 \approx 6{,}5$

Uit $\frac{47}{26} = \frac{21}{ED}$ volgt $DE = \frac{21 \cdot 26}{47} \approx 11{,}6.$

76 Voor g geldt $y = \frac{x-4}{x-6}$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{y-4}{y-6}$

$$xy - 6x = y - 4$$
$$xy - y = 6x - 4$$
$$y(x-1) = 6x - 4$$
$$y = \frac{6x-4}{x-1} = \frac{5(x-1)+5+x-4}{x-1} = 5 + \frac{x+1}{x-1}$$

Dus g is de inverse van f voor $a = 5$.

77 m: $3x + 7y = 13$ oftewel m: $3x = -7y + 13$, dus m: $x = -\frac{7}{3}y + \frac{13}{3}$.

Stel $y_M = p$, dan is $x_M = -\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}$.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\frac{\left|2(-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}) - p - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3} - 2p - 2\right|}{\sqrt{5}}$

$$\left|-\tfrac{14}{3}p + \tfrac{26}{3} - p - 1\right| = \left|-\tfrac{13}{3}p + \tfrac{7}{3}\right|$$
$$\left|-\tfrac{17}{3}p + \tfrac{23}{3}\right| = \left|-\tfrac{13}{3}p + \tfrac{7}{3}\right|$$
$$-\tfrac{17}{3}p + \tfrac{23}{3} = -\tfrac{13}{3}p + \tfrac{7}{3} \vee -\tfrac{17}{3}p + \tfrac{23}{3} = \tfrac{13}{3}p - \tfrac{7}{3}$$
$$-\tfrac{4}{3}p = -\tfrac{16}{3} \vee -10p = -10$$
$$p = 4 \vee p = 1$$

$p = 1$ geeft $M(2, 1)$ en $p = 4$ geeft $N(-5, 4)$.

Dus $d(M, N) = \sqrt{(-5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$.

78 Raken, dus $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$

$$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \cdot -2x = a$$
$$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} = a$$

Substitutie van $a = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$ in $\sqrt{5-x^2} = ax + 5$ geeft $\sqrt{5-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \cdot x + 5$

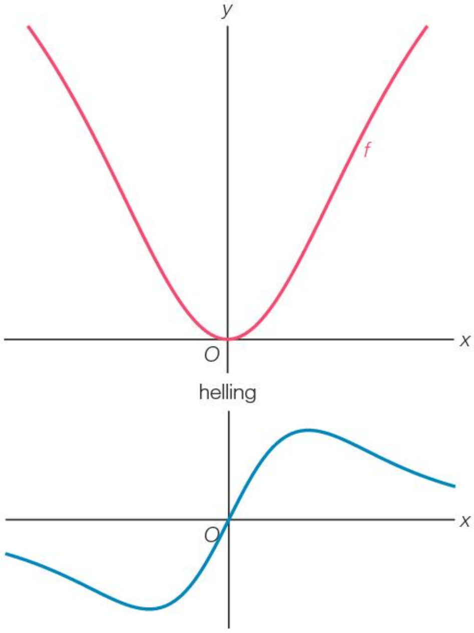
$$5 - x^2 = -x^2 + 5\sqrt{5-x^2}$$
$$5 = 5\sqrt{5-x^2}$$
$$1 = \sqrt{5-x^2}$$
$$1 = 5 - x^2$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \vee x = -2$$

$x = 2$ geeft $a = \frac{-2}{\sqrt{5-4}} = -2$ en $x = -2$ geeft $a = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2$.

Dus de grafieken van f en g raken elkaar voor $a = 2$ en voor $a = -2$.

Bladzijde 235

79



80

$$\frac{3x-5}{x^2+4}=\frac{6x-10}{x+36}$$
$$\frac{3x-5}{x^2+4}=\frac{2(3x-5)}{x+36}$$
$$3x-5=0 \vee \frac{1}{x^2+4}=\frac{2}{x+36}$$
$$3x=5 \vee 2x^2+8=x+36$$
$$x=1\tfrac{2}{3} \vee 2x^2-x-28=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot -28=225$$
$$x=1\tfrac{2}{3} \vee x=\frac{1+15}{4}=4 \vee x=\frac{1-15}{4}=-3\tfrac{1}{2}$$

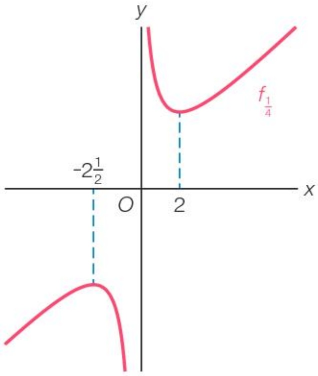
81

$$4\cdot 2^x=4^{2x-1}$$
$$2^2\cdot 2^x=(2^2)^{2x-1}$$
$$2^{2+x}=2^{4x-2}$$
$$2+x=4x-2$$
$$-3x=-4$$
$$x=1\tfrac{1}{3}$$

82

$$f_p(x)=\frac{x^2+5}{x+p} \text{ geeft } f_p{}'(x)=\frac{(x+p)\cdot 2x-(x^2+5)\cdot 1}{(x+p)^2}=\frac{2x^2+2px-x^2-5}{(x+p)^2}=\frac{x^2+2px-5}{(x+p)^2}$$
$$f_p{}'(2)=0 \text{ geeft } \frac{4+4p-5}{(2+p)^2}=0$$
$$4p-1=0$$
$$p=\tfrac{1}{4}$$
$$p=\tfrac{1}{4} \text{ geeft } f_{\frac{1}{4}}(x)=\frac{x^2+5}{x+\frac{1}{4}} \text{ en } f_{\frac{1}{4}}{}'(x)=\frac{x^2+\frac{1}{2}x-5}{(x+\frac{1}{4})^2}$$
$$f_{\frac{1}{4}}{}'(x)=0 \text{ geeft } x^2+\tfrac{1}{2}x-5=0$$
$$(x-2)(x+2\tfrac{1}{2})=0$$
$$x=2 \vee x=-2\tfrac{1}{2}$$

© Noordhoff Uitgevers bv



Dus $p = \frac{1}{4}$ en max. is $f_{\frac{1}{4}}(-2\frac{1}{2}) = \dfrac{6\frac{1}{4} + 5}{-2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = -5$.

83 $l\colon \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = 2t + b \end{cases}$ oftewel $l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\text{, dus } l\colon 2x - 3y = c \\ \text{door } (-3, b) \end{array}\right\} c = 2 \cdot -3 - 3 \cdot b = -6 - 3b$$

Dus $l\colon 2x - 3y = -6 - 3b$.

$k\colon 2x + ay = 12$ en $l\colon 2x - 3y = -6 - 3b$ vallen samen als $a = -3 \wedge 12 = -6 - 3b$

$a = -3 \wedge 3b = -18$

$a = -3 \wedge b = -6$

84 $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$

$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$

$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\cos^4(x) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x))^2$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x))$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

Dus $y = \cos^4(x)$ is te herleiden tot $y = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$.

85 $x^2 - 1 = 0$ geeft $x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = x + \frac{3x^2 - 4x + 8}{x^2 - 1}$$

$$= x + \frac{3(x^2 - 1) + 3 - 4x + 8}{x^2 - 1} = x + 3 + \frac{-4x + 11}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-4}{x} + \frac{11}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 3$.

86 Loodrecht snijden, dus $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$\ln(x) = x^2 + px \wedge \frac{1}{x} \cdot (2x + p) = -1$$
$$\ln(x) = x^2 + px \wedge 2x + p = -x$$
$$\ln(x) = x^2 + px \wedge p = -3x$$

Substitutie van $p = -3x$ in $\ln(x) = x^2 + px$ geeft $\ln(x) = x^2 + -3x \cdot x$

$$\ln(x) = -2x^2$$

Voer in $y_1 = \ln(x)$ en $y_2 = -2x^2$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}548...$
Dus $p = -3 \cdot 0{,}548... \approx -1{,}64$.

87 k: $2x + y = 8$ oftewel k: $y = 8 - 2x$
Stel $M(p, 8 - 2p)$.
l: $3x - 4y = 8$ oftewel l: $3x - 4y - 8 = 0$

$d(M, l) = d(M, y\text{-as})$ geeft $\dfrac{|3p - 4(8 - 2p) - 8|}{\sqrt{25}} = |p|$

$$\frac{|3p - 32 + 8p - 8|}{5} = |p|$$
$$|11p - 40| = 5|p|$$
$$11p - 40 = 5p \vee 11p - 40 = -5p$$
$$6p = 40 \vee 16p = 40$$
$$p = 6\tfrac{2}{3} \vee p = 2\tfrac{1}{2}$$

$p = 6\frac{2}{3}$ geeft $N(6\frac{2}{3}, -5\frac{1}{3})$ en $p = 2\frac{1}{2}$ geeft $M(2\frac{1}{2}, 3)$.

Bladzijde 236

88 $$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)}{x - 3} = \frac{(2^2 + 4)(2 + 2)}{2 - 3} = -32$$

89 $f(x) = x^3 + \dfrac{5x^2 + 1}{2x - 3}$ geeft

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{(2x - 3) \cdot 10x - (5x^2 + 1) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{20x^2 - 30x - 10x^2 - 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{10x^2 - 30x - 2}{(2x - 3)^2}$$

90 $x^5 + 9 = 10x^2\sqrt{x}$
Stel $x^2\sqrt{x} = u$.
$u^2 + 9 = 10u$
$u^2 - 10u + 9 = 0$
$(u - 1)(u - 9) = 0$
$u = 1 \vee u = 9$
$x^2\sqrt{x} = 1 \vee x^2\sqrt{x} = 9$
$x^5 = 1 \vee x^5 = 81$
$x = 1 \vee x = \sqrt[5]{81}$

91 Stel $H = b \cdot g^t$.

$$g_{3\text{ dagen}} = \frac{795}{942}$$
$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{795}{942}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}9450...$$

$$\left.\begin{array}{l} H = b \cdot 0{,}9450...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 942 \end{array}\right\} \; b \cdot 0{,}9450...^5 = 942$$
$$b = \frac{942}{0{,}9450...^5} = 1249{,}8...$$

Dus $H = 1250 \cdot 0{,}945^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

92 $f_p(x) = \dfrac{x^2+1}{x+p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x+p) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 1}{(x+p)^2} = \dfrac{2x^2 + 2px - x^2 - 1}{(x+p)^2} = \dfrac{x^2 + 2px - 1}{(x+p)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px - 1 = 0$

$2px = -x^2 + 1$

$p = \dfrac{-x^2+1}{2x}$

$y = \dfrac{x^2+1}{x + \dfrac{-x^2+1}{2x}} = \dfrac{2x(x^2+1)}{2x^2 - x^2 + 1} = \dfrac{2x(x^2+1)}{x^2+1} = 2x$

Dus alle toppen liggen op de lijn k: $y = 2x$.

93 k: $\dfrac{x}{2p} + \dfrac{y}{p} = 1$ oftewel k: $x + 2y = 2p$

Door (6, 1) geeft $6 + 2 = 2p$

$8 = 2p$

$p = 4$

94 $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x + 4 + \sqrt{x}}{x^2} = x + 5 + \dfrac{6}{x} + 4x^{-2} + x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - 4x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + c$

95 Er moet gelden $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

$f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi - p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$

$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi + p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + p\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$

Voor elke p is $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

Dus de grafiek van f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

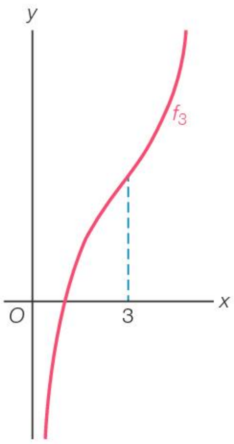
96 $f_a(x) = (x + a)\ln(x)$

$f_a'(x) = 1 \cdot \ln(x) + (x + a) \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 + \dfrac{a}{x} = \ln(x) + 1 + ax^{-1}$

$f_a''(x) = \dfrac{1}{x} - ax^{-2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{x^2}$

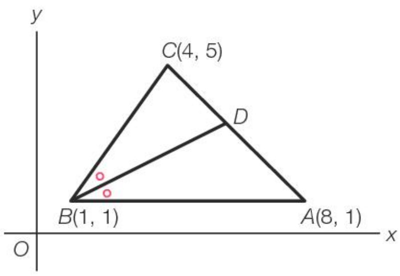
$f_a''(3) = 0$ geeft $\frac{1}{3} - \dfrac{a}{9} = 0$

$a = 3$



De grafiek van f_a gaat voor $a = 3$ bij $x = 3$ over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

97



$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ en $\left|\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right| = 5$, dus $\vec{r}_{BD} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en BD: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en AC: $x + y = 9$.

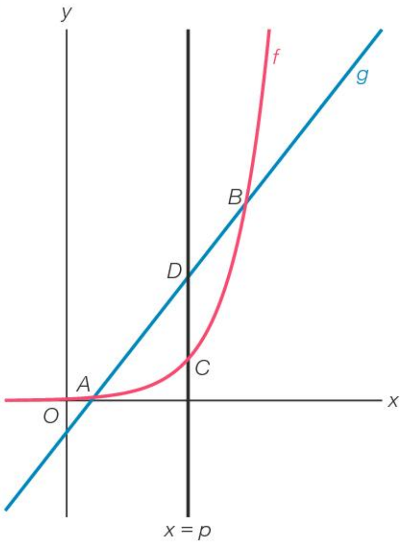
BD snijden met AC geeft $1 + 2t + 1 + t = 9$

$$3t = 7$$
$$t = 2\tfrac{1}{3}$$

$t = 2\frac{1}{3}$ geeft $x_D = 1 + 2 \cdot 2\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3}$ en $y_D = 1 + 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Dus $D(5\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3})$.

98



$L = g(p) - f(p) = 3p - 1 - e^{2p-3}$

$\frac{dL}{dp} = 3 - e^{2p-3} \cdot 2 = 3 - 2e^{2p-3}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $2e^{2p-3} = 3$

$$e^{2p-3} = 1\tfrac{1}{2}$$
$$2p - 3 = \ln(1\tfrac{1}{2})$$
$$2p = 3 + \ln(1\tfrac{1}{2})$$
$$p = 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln(1\tfrac{1}{2})$$

Dus voor $p = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$ is de lengte van CD maximaal.

Deze maximale lengte is $3(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})) - 1 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2}) - 2\frac{1}{2} = 2 + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$.

99 $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}$

Er is een perforatie als $x = 5$.

$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Dus de perforatie is $(5, \frac{2}{5})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

100 $\frac{x^4 - x^2 - 20}{x^4 - 2x^2 - 24} = \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 5)}{(x^2 + 4)(x^2 - 6)} = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 6}$

Bladzijde 237

101 $2^{x-4} + 2^{x+1} = 66$
$2^x \cdot 2^{-4} + 2^x \cdot 2^1 = 66$
$\frac{1}{16} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 66$
$2\frac{1}{16} \cdot 2^x = 66$
$2^x = 32$
$x = 5$

102 De draaiingshoek van A is $\frac{1}{3}\pi$.
Dus de draaiingshoeken van B, C en D zijn respectievelijk $\frac{5}{6}\pi$, $1\frac{1}{3}\pi$ en $1\frac{5}{6}\pi$.
Dit geeft $B(\cos(\frac{5}{6}\pi), \sin(\frac{5}{6}\pi)) = B(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $C(\cos(1\frac{1}{3}\pi), \sin(1\frac{1}{3}\pi)) = C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $D(\cos(1\frac{5}{6}\pi), \sin(1\frac{5}{6}\pi)) = D(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

103 De lijnen l_1 en l_2 zijn evenwijdig met k, op afstand $\sqrt{2}$ van k.
$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en k: $x + y = 4$.
$l \,//\, k$ geeft l: $x + y = c$ oftewel l: $x + y - c = 0$.
Het punt $(4, 0)$ ligt op k.
$d(k, l) = d((4, 0), l) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{|4 + 0 - c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
$|4 - c| = 2$
$4 - c = 2 \vee 4 - c = -2$
$c = 2 \vee c = 6$
Dus l_1: $x + y = 2$ en l_2: $x + y = 6$.
l_1: $x + y = 2$ oftewel l_1: $y = 2 - x$ snijden met c geeft $x^2 + (2 - x)^2 - 2x + 6(2 - x) = 0$
$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x + 12 - 6x = 0$
$2x^2 - 12x + 16 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 2)(x - 4) = 0$
$x = 2 \vee x = 4$
$x = 2$ en $y = 2 - x$ geeft het punt $(2, 0)$.
$x = 4$ en $y = 2 - x$ geeft het punt $(4, -2)$.
l_2: $x + y = 6$ oftewel l_2: $y = 6 - x$ snijden met c geeft $x^2 + (6 - x)^2 - 2x + 6(6 - x) = 0$
$x^2 + 36 - 12x + x^2 - 2x + 36 - 6x = 0$
$2x^2 - 20x + 72 = 0$
$x^2 - 10x + 36 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = -44$
$D < 0$, dus geen oplossingen.
De gevraagde punten zijn $(2, 0)$ en $(4, -2)$.

104 $O(V) = \int_0^p x^2\sqrt{x}\,dx = \int_0^p x^{2\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{7}x^{3\frac{1}{2}}\right]_0^p = \frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}} - 0 = \frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}}$
$O(V) = 10$ geeft $\frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}} = 10$
$p^{3\frac{1}{2}} = 35$
$p = 35^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{35^2} = \sqrt[7]{1225}$

105 $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

$f(x) = \cos^2(4x) + \sin^2(6x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(12x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(8x) - \frac{1}{2}\cos(12x)$ geeft
$F(x) = x + \frac{1}{16}\sin(8x) - \frac{1}{24}\sin(12x) + c$

© Noordhoff Uitgevers bv

106 De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\sin^2(x) - a\cos(x) = 0 \wedge \sin(x) + \frac{1}{2} = 0$.
$\sin(x) + \frac{1}{2} = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$$x = -\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 1\tfrac{1}{6}\pi \vee x = 1\tfrac{5}{6}\pi$$

$x = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin^2(1\frac{1}{6}\pi) - a\cos(1\frac{1}{6}\pi) = 0$

$$(-\tfrac{1}{2})^2 - a \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = -\tfrac{1}{4}$$

$$a = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

$x = 1\frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin^2(1\frac{5}{6}\pi) - a\cos(1\frac{5}{6}\pi) = 0$

$$(-\tfrac{1}{2})^2 - a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}$$

$$a = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

Er is een perforatie als $a = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$ en als $a = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

107 Van c is het middelpunt $M(-4, 5)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.
k: $y = ax + b$ door $A(-1, 4)$ geeft $-a + b = 4$, dus $b = a + 4$.
Dit geeft k: $y = ax + a + 4$ oftewel k: $ax - y + a + 4 = 0$.

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|-4a - 5 + a + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$$|-3a - 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 + 6a - 4 = 0$$

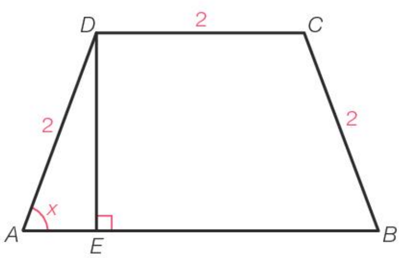
$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3 + 5}{4} = \tfrac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = 4\frac{1}{2}$ en k_1: $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.
$a = -2$ geeft $b = 2$ en k_2: $y = -2x + 2$.

108



$\sin(x) = \dfrac{DE}{2}$ geeft $DE = 2\sin(x)$

$\cos(x) = \dfrac{AE}{2}$ geeft $AE = 2\cos(x)$

$AB = 2 + 2 \cdot AE = 2 + 2 \cdot 2\cos(x) = 2 + 4\cos(x)$
$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(2 + 4\cos(x) + 2) \cdot 2\sin(x) = \sin(x)(4 + 4\cos(x))$

$$\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \cdot (4 + 4\cos(x)) + \sin(x) \cdot -4\sin(x) = 4\cos(x) + 4\cos^2(x) - 4\sin^2(x)$$

© Noordhoff Uitgevers bv

$$\frac{dO}{dx} = 0 \text{ geeft } 4\cos(x) + 4\cos^2(x) - 4\sin^2(x) = 0$$
$$4\cos(x) + 4(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0$$
$$4\cos(x) + 4\cos(2x) = 0$$
$$4\cos(2x) = -4\cos(x)$$
$$\cos(2x) = -\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos(x + \pi)$$
$$2x = x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -x - \pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi$$
$$0 < x < \tfrac{1}{2}\pi \text{ geeft } x = \tfrac{1}{3}\pi$$
$$x = \tfrac{1}{3}\pi \text{ geeft } O_{max} = \sin(\tfrac{1}{3}\pi)(4 + 4\cos(\tfrac{1}{3}\pi)) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (4 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}) = 3\sqrt{3}$$

109 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 3 - 8 + 3 = -2$.
$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(1) = 1, \text{ dus } A(1, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 1 \\ b = 3 \end{array}$$
Dus k: $y = -2x + 3$.

Bladzijde 238

110 $F = 10 - \dfrac{K}{K+1}$
$$F(K+1) = 10(K+1) - K$$
$$FK + F = 10K + 10 - K$$
$$FK - 9K = 10 - F$$
$$K(F - 9) = 10 - F$$
$$K = \frac{10 - F}{F - 9}$$

111 $9^x + 54 = 15 \cdot 3^x$
$$(3^x)^2 - 15 \cdot 3^x + 54 = 0$$
Stel $3^x = u$.
$$u^2 - 15u + 54 = 0$$
$$(u - 6)(u - 9) = 0$$
$$u = 6 \vee u = 9$$
$$3^x = 6 \vee 3^x = 9$$
$$x = {}^3\log(6) \vee x = 2$$

112 $\cos^2(\tfrac{1}{2}x) - \cos(\tfrac{1}{2}x) - 2 = 0$
$$(\cos(\tfrac{1}{2}x) + 1)(\cos(\tfrac{1}{2}x) - 2) = 0$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}x) = -1 \vee \cos(\tfrac{1}{2}x) = 2$$
$$\tfrac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = 2\pi + k \cdot 4\pi$$

113 $y = 2 + 3^{0,2x-1}$
$$3^{0,2x-1} = y - 2$$
$$0,2x - 1 = {}^3\log(y - 2)$$
$$0,2x = 1 + {}^3\log(y - 2)$$
$$x = 5 + 5 \cdot {}^3\log(y - 2)$$

114 Stel k: $y = 2x + b$.
Substitutie van $y = 2x + b$ in de cirkelvergelijking geeft
$x^2 + (2x + b)^2 + 2x - 6(2x + b) + 5 = 0$
$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 + 2x - 12x - 6b + 5 = 0$
$5x^2 + 4bx - 10x + b^2 - 6b + 5 = 0$
$5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 6b + 5 = 0$
$D = (4b - 10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 5) = 16b^2 - 80b + 100 - 20b^2 + 120b - 100 = -4b^2 + 40b$
$D = 0$ geeft $-4b^2 + 40b = 0$
$4b(-b + 10) = 0$
$b = 0 \vee b = 10$
Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x$ en $y = 2x + 10$.

Alternatieve uitwerking
Stel k: $y = 2x + b$ oftewel k: $2x - y + b = 0$
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus van de cirkel is het middelpunt $M(-1, 3)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.
$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|-2 - 3 + b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
$|-5 + b| = 5$
$-5 + b = 5 \vee -5 + b = -5$
$b = 10 \vee b = 0$
Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x + 10$ en $y = 2x$.

115 $f(x) = \dfrac{16}{(4x + 10)^5} = 16(4x + 5)^{-5}$ geeft $F(x) = 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}(4x + 10)^{-4} + c = \dfrac{-1}{(4x + 10)^4} + c$

116 $x = 0$ geeft $2 + 4\cos(2t) = 0$
$4\cos(2t) = -2$
$\cos(2t) = -\frac{1}{2}$
$2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
t in $[0, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$
$x < 0$ geeft $\frac{1}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi$

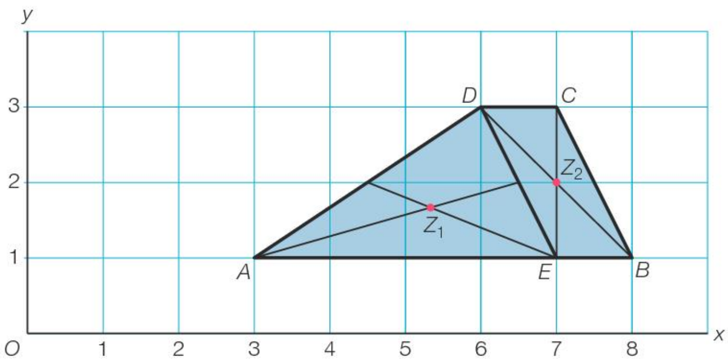
$y = 1$ geeft $1 + 4\sin(2t) = 1$
$4\sin(2t) = 0$
$\sin(2t) = 0$
$2t = k \cdot \pi$
$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$
t in $[0, \pi]$ geeft $t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$
$y > 1$ geeft $0 < t < \frac{1}{2}\pi$

$x < 0 \wedge y > 1$ geeft $\frac{1}{3}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$
Dus P bevindt zich $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$ seconden links van de y-as en boven de lijn $y = 1$.

117 $f_a(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x + a} = \dfrac{(x - 1)(x + 5)}{2x + a} = \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + a}$
De grafiek van f_a heeft een perforatie als $a = -2$ en als $a = 10$.
$a = -2$ geeft $\lim\limits_{x \to 1} f_{-2}(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{4}(2x + 10) = 3$
$a = 10$ geeft $\lim\limits_{x \to -5} f_{10}(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + 10} = \lim\limits_{x \to -5} \frac{1}{4}(2x - 2) = -3$
Dus voor $a = -2$ is de perforatie het punt $(1, 3)$ en voor $a = 10$ is de perforatie het punt $(-5, -3)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

118



$\vec{z}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}16\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{1}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

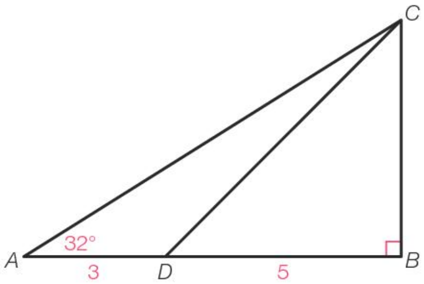
$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

$m_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$, $m_2 = 1 \cdot 2 = 2$ en de totale massa is 6.

$\vec{z} = \frac{1}{6}\left(4 \cdot \begin{pmatrix}5\frac{1}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}21\frac{1}{3}\\6\frac{2}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}35\frac{1}{3}\\10\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{8}{9}\\1\frac{7}{9}\end{pmatrix}$, dus $Z(5\frac{8}{9}, 1\frac{7}{9})$.

119 $f(x) = \dfrac{6x-5}{2x+1} = \dfrac{3(2x+1)-3-5}{2x+1} = 3 - \dfrac{8}{2x+1}$ geeft $F(x) = 3x - 8 \cdot \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c = 3x - 4\ln|2x+1| + c$

120



$\angle ACB = 180° - 90° - 32° = 58°$

$\tan(32°) = \dfrac{BC}{8}$ geeft $BC = 8\tan(32°) = 4{,}99...$

$\tan(\angle BCD) = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{5}{4{,}99...} = 1{,}00...$ geeft $\angle BCD = 45{,}00...°$

$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 58° - 45{,}00...° \approx 13{,}0°$

121 Voor f geldt $y = \frac{1}{2} - \dfrac{5}{4x-6}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{1}{2} - \dfrac{5}{4y-6}$

$$x(4y-6) = \tfrac{1}{2}(4y-6) - 5$$
$$4xy - 6x = 2y - 3 - 5$$
$$4xy - 2y = 6x - 8$$
$$y(4x-2) = 6x - 8$$
$$y = \frac{6x-8}{4x-2} = \frac{2(3x-4)}{2(2x-1)} = \frac{3x-4}{2x-1}$$

Dus $g(x) = \dfrac{3x-4}{2x-1}$ is de inverse van $f(x) = \frac{1}{2} - \dfrac{5}{4x-6}$.

122 $\vec{n}_k = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_k = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

l: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|-9-14|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{58}} = \dfrac{23}{\sqrt{754}}$

$\angle(k, l) \approx 33{,}1°$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 239

123 ${}^{3}\log(x+1) = 4 + {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$
${}^{3}\log(x+1) = 4 - {}^{3}\log(x-1)$
${}^{3}\log(x+1) + {}^{3}\log(x-1) = 4$
${}^{3}\log((x+1)(x-1)) = 4$
${}^{3}\log(x^2-1) = 4$
$x^2 - 1 = 81$
$x^2 = 82$
$x = \sqrt{82} \vee x = -\sqrt{82}$ (vold. niet)

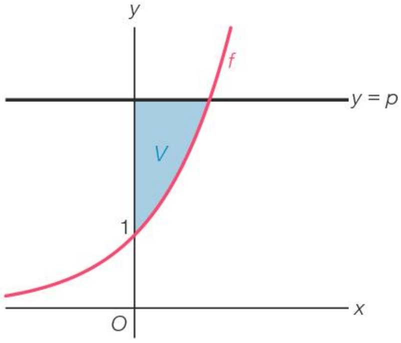
124 Van c is het middelpunt $M(3, -1)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.
k: $y = ax + b$ door $A(-1, -3)$ geeft $-a + b = -3$, dus $b = a - 3$.
Dit geeft k: $y = ax + a - 3$ oftewel k: $ax - y + a - 3 = 0$.

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|3a + 1 + a - 3|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

$|4a - 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$
$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$
$6a^2 - 16a - 6 = 0$
$3a^2 - 8a - 3 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100$
$a = \dfrac{8+10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$

$a = 3$ geeft $b = 0$ en k_1: $y = 3x$.
$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -3\frac{1}{3}$ en k_2: $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

125



$f(x) = p$ geeft $e^x = p$ oftewel $x = \ln(p)$

$$O(V) = \int_0^{\ln(p)} (p - e^x)\,dx = \left[px - e^x\right]_0^{\ln(p)} = p\ln(p) - p - (0 - 1) = p\ln(p) - p + 1$$

$O(V) = 1$ geeft $p\ln(p) - p + 1 = 1$
$p\ln(p) - p = 0$
$p(\ln(p) - 1) = 0$
$p = 0 \;\vee\; \ln(p) = 1$
vold. niet $p = e$

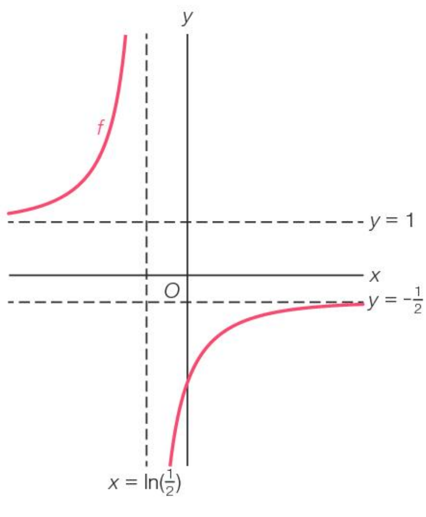
Dus voor $p = e$.

126 $1 - 2e^x = 0$
$e^x = \frac{1}{2}$
$x = \ln(\frac{1}{2})$
De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(\frac{1}{2})$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{1 - 2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 2} = \frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{1 - 2e^x} = \frac{0+1}{1 - 2\cdot 0} = \frac{1}{1} = 1$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.
Zie de figuur hiernaast.



© Noordhoff Uitgevers bv

127 $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$

$$2t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

De eerste keer is voor $t = \tfrac{1}{4}\pi$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(3t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\tfrac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -3\sin(\tfrac{3}{4}\pi) \\ -2\sin(\tfrac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v(\tfrac{1}{4}\pi) = \sqrt{(-1\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (-2)^2} = \sqrt{8\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{34}$$

Dus de gevraagde baansnelheid is $\tfrac{1}{2}\sqrt{34}$.

128 $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 2t + 1 = 0$

$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

Het raakpunt is $(1, 0)$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t + 3 \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -1 + 2 + 3 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $v(1) = 4$.

De gevraagde baansnelheid is 4.

$v(t) = \sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t-2)^2}$ geeft

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t-2)^2}} \cdot (2(-t^2 + 2t + 3) \cdot (-2t + 2) + 2(2t - 2) \cdot 2)$$

$$a(1) = \frac{1}{2\sqrt{(-1 + 2 + 3)^2 + (2-2)^2}} \cdot (2(-1 + 2 + 3) \cdot (-2 + 2) + 2(2 - 2) \cdot 2) = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2) = 0$$

De gevraagde baanversnelling is 0.

129 $y = \sqrt{x - 1}$

$y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1$

$$I(L) = \pi\int_0^q x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^q (y^2 + 1)^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^q (y^4 + 2y^2 + 1)\,\mathrm{d}y = \pi\left[\tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{2}{3}y^3 + y\right]_0^q = \pi(\tfrac{1}{5}q^5 + \tfrac{2}{3}q^3 + q)$$

$q = \sqrt{p-1}$ geeft $I(L) = \pi(\tfrac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \tfrac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1})$

$$I(M) = \pi\int_1^p y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^p (x - 1)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2 - x\right]_1^p = \pi(\tfrac{1}{2}p^2 - p - (\tfrac{1}{2} - 1)) = \pi(\tfrac{1}{2}p^2 - p + \tfrac{1}{2})$$

$I(L) = 2 \cdot I(M)$ geeft $\pi(\tfrac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \tfrac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1}) = 2 \cdot \pi(\tfrac{1}{2}p^2 - p + \tfrac{1}{2})$ oftewel

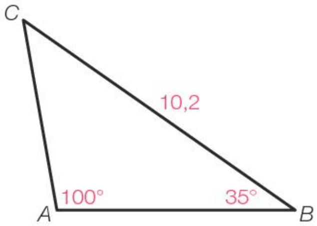
$\tfrac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \tfrac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1} = p^2 - 2p + 1$.

Voer in $y_1 = \tfrac{1}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \tfrac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + \sqrt{x-1}$ en $y_2 = x^2 - 2x + 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 3{,}448...$

Dus $p \approx 3{,}45$.

130



$\angle C = 180° - 100° - 35° = 45°$

De sinusregel geeft $\dfrac{10{,}2}{\sin(100°)} = \dfrac{AB}{\sin(45°)}$ en $\dfrac{10{,}2}{\sin(100°)} = \dfrac{AC}{\sin(35°)}$

$AB = \dfrac{10{,}2\sin(45°)}{\sin(100°)} = 7{,}32...$ $\quad AC = \dfrac{10{,}2\sin(35°)}{\sin(100°)} = 5{,}94...$

Dus $AB \approx 7{,}3$ en $AC \approx 5{,}9$.

131 $2\sin(2x) = -\sqrt{3}$

$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

132 $d(A, B) = \sqrt{(2-2p)^2 + (p+1-3)^2} = \sqrt{(2-2p)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{4 - 8p + 4p^2 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{5p^2 - 12p + 8}$

$\sqrt{5p^2 - 12p + 8}$ is minimaal als $5p^2 - 12p + 8$ minimaal is. Dus als $p = -\dfrac{-12}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}$.

De minimale afstand is $\sqrt{5 \cdot (\frac{6}{5})^2 - 12 \cdot \frac{6}{5} + 8} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

133 $25^x + 6 = 5^{x+1}$

$(5^2)^x - 5^{x+1} + 6 = 0$

$(5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$

Stel $5^x = u$.

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$(u-2)(u-3) = 0$

$u = 2 \vee u = 3$

$5^x = 2 \vee 5^x = 3$

$x = {}^5\log(2) \vee x = {}^5\log(3)$

134 $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

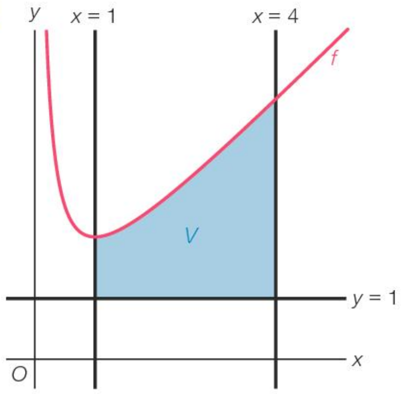
$$\cos(\angle(AB, AC)) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-3+12|}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$

$\angle(AB, AC) \approx 55{,}3°$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 240

135



$$I(L) = \pi\int_1^4 \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = \pi\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x - 3\pi = \pi\int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x - 3\pi$$

$$= \pi\int_1^4 (x^2 + 2 + x^{-2})\,\mathrm{d}x - 3\pi = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x - x^{-1}\right]_1^4 - 3\pi$$

$$= \pi(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^{-1} - (\tfrac{1}{3} + 2 - 1)) - 3\pi = 27\tfrac{3}{4}\pi - 3\pi = 24\tfrac{3}{4}\pi$$

136 $y(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = 0$

$$2t = k \cdot \pi$$
$$t = k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ snijdt de baan de positieve x-as.

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = \cos(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{2\cos(\pi)}{\cos(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$\tan(\alpha) = -2\sqrt{2}$ geeft $\alpha = -70{,}5...°$

Dus de gevraagde hoek is 71°.

137 $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^{2x} - 3}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - 3) \cdot e^x - (e^x - 2) \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{e^{3x} - 3\,e^x - 2\,e^{3x} + 4\,e^{2x}}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{-e^{3x} + 4\,e^{2x} - 3\,e^x}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{-e^x(e^{2x} - 4\,e^x + 3)}{(e^{2x} - 3)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $-e^x(e^{2x} - 4\,e^x + 3) = 0$

$$e^{2x} - 4\,e^x + 3 = 0$$
$$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$$
$$e^x = 1 \vee e^x = 3$$
$$x = 0 \vee x = \ln(3)$$

$$f(0) = \frac{1-2}{1-3} = \tfrac{1}{2} \text{ en } f(\ln(3)) = \frac{3-2}{9-3} = \tfrac{1}{6}$$

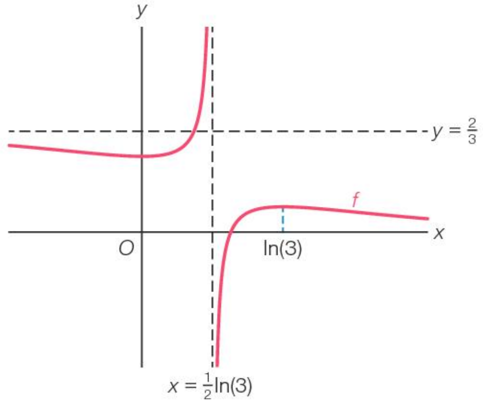
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{2}{e^{2x}}}{1 - \frac{3}{e^{2x}}} = \frac{0-0}{1-0} = 0 \text{ en } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \frac{0-2}{0-3} = \tfrac{2}{3}$$

$e^{2x} - 3 = 0$ geeft $e^{2x} = 3$

$$2x = \ln(3)$$
$$x = \tfrac{1}{2}\ln(3)$$

Schets, zie hiernaast.

Het bereik van f bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, \frac{1}{6}]$ en $[\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.



138 $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t - 4 \\ y'(t) = 4t + 4 \end{cases}$

Evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$4t + 4 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$

$4t = -4 \wedge 2t \neq 4$

$t = -1 \wedge t \neq 2$

$t = -1$ geeft het punt $(5, -2)$.

Evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$2t - 4 = 0 \wedge 4t + 4 \neq 0$

$t = 2 \wedge t \neq -1$

$t = 2$ geeft het punt $(-4, 16)$.

139 Er geldt $-1 \leq \cos(t) \leq 1$, dus $-1 \leq x \leq 1$.

Substitutie van $x = \cos(t)$ en $y = 2\sin(2t - \frac{1}{2}\pi)$ in $y = 2 - 4x^2$ geeft $2\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 2 - 4\cos^2(t)$

$\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 1 - 2\cos^2(t)$

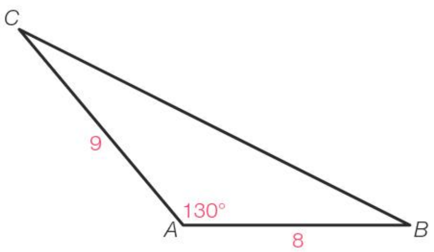
$\cos(2t - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2t)$

$\cos(2t) = \cos(2t)$

Dit klopt voor elke waarde van t.

Dus bij de grafiek met de gegeven parametervoorstelling hoort de parabool $y = 2 - 4x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$.

140



De cosinusregel geeft $BC^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(130°) = 237{,}56...$

$BC = \sqrt{237{,}56...} \approx 15{,}4$

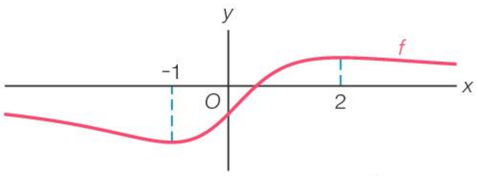
141 $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2) \cdot 2 - (2x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2x + 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$



min. is $f(-1) = -1$, max. is $f(2) = \frac{1}{2}$ en $B_f = [-1, \frac{1}{2}]$.

142 $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

143 Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{1 - 2}{0 - -1} = -1$.

k: $y = -x + b$ door $C(0, 1)$ geeft k: $y = -x + 1$ oftewel k: $x + y - 1 = 0$.

$d(A, k) = \dfrac{|9 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

 © Noordhoff Uitgevers bv

144 $g_{103\text{ jaar}} = \frac{1}{2}$

$g_{\text{jaar}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{103}} \approx 0{,}9933$

Dus per jaar is de afname 0,67%.

145 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|15 + 4|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$

$\angle(k, l) \approx 11{,}9°$

Bladzijde 241

146 Schuif de grafiek van f 1 omlaag, dit geeft de grafiek van $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - 1$.

$$I(L) = \pi\int_1^4 (g(x))^2\,dx = \pi\int_1^4 \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1\right)^2 dx = \pi\int_1^4 \left(\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x} \cdot 1 + 1\right)dx$$

$$= \pi\int_1^4 \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right)dx = \pi\int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 1\right)dx$$

$$= \pi\int_1^4 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + x^{-2}\right)dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2\ln|x| - x^{-1}\right]_1^4$$

$$= \pi(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 4^2 + 3 \cdot 4 - 2\ln(4) - \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 2\ln(1) - 1))$$

$$= \pi(21\tfrac{1}{3} - 16 + 12 - 2\ln(2^2) - \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 0 - 1)) = 15\tfrac{3}{4}\pi - 4\pi\ln(2)$$

147 $y = {}^5\log(x)$

$\downarrow$ translatie (3, −2)

$y = -2 + {}^5\log(x - 3)$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$

$f(x) = -2 + {}^5\log(2x - 3)$

148 c heeft middelpunt $M(1, 0)$ en straal $\sqrt{2}$.

d heeft middelpunt $N(4, 1)$ en straal $2\sqrt{2}$.

Stel k: $y = ax + b$ oftewel k: $ax - y + b = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{2}$ oftewel $|a + b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$.

$d(N, k) = 2\sqrt{2}$ geeft $\frac{|4a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{2}$ oftewel $|4a - 1 + b| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$.

Hieruit volgt $2|a + b| = |4a - 1 + b|$

$2(a + b) = 4a - 1 + b \vee 2(a + b) = -4a + 1 - b$

$2a + 2b = 4a - 1 + b \vee 2a + 2b = -4a + 1 - b$

$b = 2a - 1 \vee 3b = -6a + 1$

$b = 2a - 1 \vee b = -2a + \frac{1}{3}$

$b = 2a - 1$ invullen bij $|a + b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|a + 2a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

$|3a - 1| = \sqrt{2a^2 + 2}$

$9a^2 - 6a + 1 = 2a^2 + 2$

$7a^2 - 6a - 1 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot -1 = 64$

$a = \frac{6 + 8}{14} = 1 \vee a = \frac{6 - 8}{14} = -\frac{1}{7}$

$a = 1$ geeft $b = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ en k_1: $y = x + 1$.

$a = -\frac{1}{7}$ geeft $b = 2 \cdot -\frac{1}{7} - 1 = -1\frac{2}{7}$ en k_2: $y = -\frac{1}{7}x - 1\frac{2}{7}$.

Hiermee zijn de twee lijnen gevonden, dus $b = -2a + \frac{1}{3}$ voldoet niet.

© Noordhoff Uitgevers bv

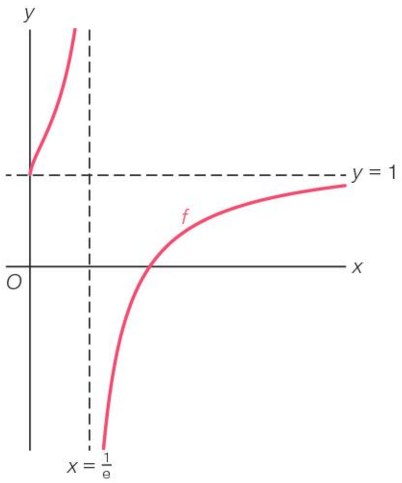
149 $\ln(x) + 1 = 0$
$\ln(x) = -1$
$x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to\infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to\infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to-\infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x)\to-\infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$



150 $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -t^2 + 2t + 3 \\ y'(t) = 2t - 4 \end{cases}$

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$
$-t^2 + 2t + 3 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$
$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge 2t \neq 4$
$(t + 1)(t - 3) = 0 \wedge t \neq 2$
$t = -1 \vee t = 3$

$t = -1$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 1)$.
$y = 9$ geeft $t^2 - 4t + 4 = 9$
$t^2 - 4t - 5 = 0$
$(t + 1)(t - 5) = 0$
$t = -1 \vee t = 5$

$t = 5$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$.
Dus de baan snijdt zichzelf op $t = 5$ in een punt waarin de raaklijn aan de baan verticaal is.
$t = 5$ geeft $\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{t=5} = \dfrac{10 - 4}{-25 + 10 + 3} = \dfrac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = -26{,}5...°$
De gevraagde hoek is $180° - 90° - 26{,}5...° \approx 63°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

151 $f(x) = -\frac{1}{5}(x-3)^4 - 2$
$\downarrow$ verm. x-as, -10
$y = 2(x-3)^4 + 20$
$\downarrow$ translatie $(5, -15)$
$g(x) = 2(x-8)^4 + 5$
min. is $g(8) = 5$

152 $2 + \frac{3}{x+4}$ is omgekeerd evenredig met y, dus $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{c}{y}$.

$x = 2$ en $y = 4$ geeft $2 + \frac{3}{2+4} = \frac{c}{4}$

$$2\tfrac{1}{2} = \frac{c}{4}$$

$$c = 10$$

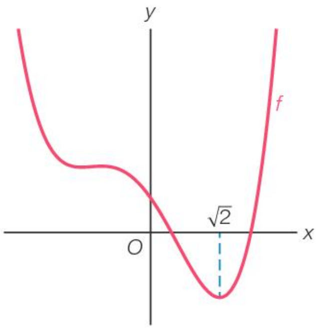
Dit geeft $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{10}{y}$

$$\frac{2x+11}{x+4} = \frac{10}{y}$$

$$y = \frac{10(x+4)}{2x+11}$$

$$y = \frac{10x+40}{2x+11}$$

153 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$
$f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0$



Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

Bladzijde 242

154 De vergelijking van c is van de vorm $(x-8)^2 + (y-5)^2 = r^2$.
Substitutie van $x = t + 2$ en $y = 3t + 1$ geeft
$(t-6)^2 + (3t-4)^2 = r^2$
$t^2 - 12t + 36 + 9t^2 - 24t + 16 = r^2$
$10t^2 - 36t + 52 - r^2 = 0$
$D = (-36)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (52 - r^2) = 1296 - 2080 + 40r^2 = 40r^2 - 784$
$D = 0$ geeft $40r^2 - 784 = 0$

$$40r^2 = 784$$

$$r^2 = 19{,}6$$

Dus c: $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 19{,}6$.

155 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$
$f'(x) = 6$ geeft $x^2 - x = 6$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$f(-2) = -2\frac{2}{3}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$
Dus $A(-2, -2\frac{2}{3})$ en $B(3, 6\frac{1}{2})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

156 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-a \end{pmatrix}$

D op de y-as geeft $a - c = 0$ oftewel $c = a$.

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a-b \\ -c \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BA}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c \\ b-a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b-2c \\ -2a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-c \\ -a+b+\frac{1}{2}c \end{pmatrix}$

BM is horizontaal als geldt $-a + b + \frac{1}{2}c = c$ oftewel $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$.

Substitutie van $c = a$ in $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$ geeft $-a + b - \frac{1}{2}a = 0$ oftewel $b = 1\frac{1}{2}a$.

$c = a$ en $b = 1\frac{1}{2}a$ geeft $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix}$ en $\vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - a \\ -a + 1\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a \\ a \end{pmatrix}$.

$BM = 3$ geeft $|1\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a| = 3$

$|1\frac{1}{4}a| = 3$

$1\frac{1}{4}a = 3$

$a = 2\frac{2}{5}$

Dus $a = 2\frac{2}{5}$, $b = 3\frac{3}{5}$ en $c = 2\frac{2}{5}$.

157 $f(x) = 0$ geeft $4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0 \vee x = 4$

$g(x) = 0$ geeft $5 - 2x = 0$

$2x = 5$

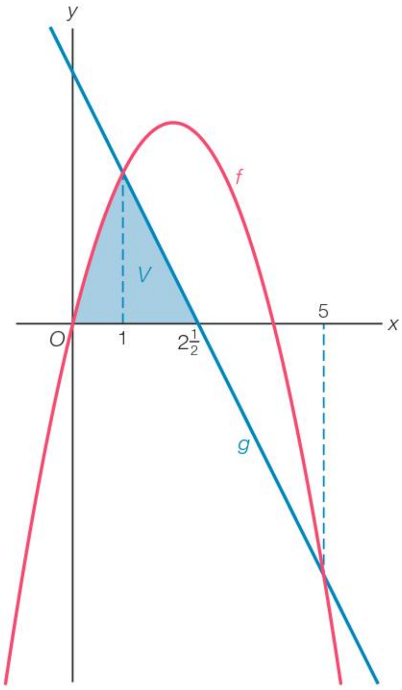
$x = 2\frac{1}{2}$

$f(x) = g(x)$ geeft $4x - x^2 = 5 - 2x$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1 \vee x = 5$



$$I(L) = \pi\int_0^1 (4x - x^2)^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^{2\frac{1}{2}} (5 - 2x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^{2\frac{1}{2}} (25 - 20x + 4x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[\tfrac{16}{3}x^3 - 2x^4 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 + \pi\left[25x - 10x^2 + \tfrac{4}{3}x^3\right]_1^{2\frac{1}{2}}$$

$$= \pi(\tfrac{16}{3} - 2 + \tfrac{1}{5}) - \pi(0 - 0 + 0) + \pi(25 \cdot 2\tfrac{1}{2} - 10 \cdot (2\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{3} \cdot (2\tfrac{1}{2})^3) - \pi(25 - 10 + \tfrac{4}{3})$$

$$= \tfrac{53}{15}\pi + \tfrac{125}{6}\pi - \tfrac{49}{3}\pi = 8\tfrac{1}{30}\pi$$

© Noordhoff Uitgevers bv

158 $y = \sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie $(4, -2)$

$y = -2 + \sqrt{x-4}$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$

$f(x) = -2 + \sqrt{2x-4}$

$D_f = [2, \rightarrow\rangle$, $B_f = [-2, \rightarrow\rangle$ en randpunt $(2, -2)$.

159 De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\ln(ax^2) + 2 = 0 \wedge \ln(x) + 4 = 0$

$\ln(ax^2) = -2 \wedge \ln(x) = -4$

$ax^2 = e^{-2} \wedge x = e^{-4}$

Substitutie van $x = e^{-4}$ in $ax^2 = e^{-2}$ geeft $a(e^{-4})^2 = e^{-2}$

$a\,e^{-8} = e^{-2}$

$a = e^6$

160 $f(x) = \dfrac{1-3x}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot -3 - (1-3x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-3(x+1) - 2(1-3x)}{(x+1)^3} = \frac{-3x-3-2+6x}{(x+1)^3} = \frac{3x-5}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^3 \cdot 3 - (3x-5) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3(x+1) - 3(3x-5)}{(x+1)^4} = \frac{3x+3-9x+15}{(x+1)^4} = \frac{-6x+18}{(x+1)^4}$$

$f'(-3) = \dfrac{-14}{(-2)^3} > 0$ en $f''(-3) = \dfrac{36}{(-2)^4} > 0$

Dus in A toenemend stijgend.

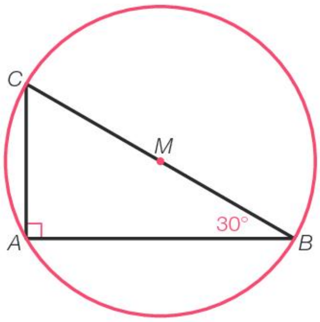
$f'(1) = \dfrac{-2}{2^3} < 0$ en $f''(1) = \dfrac{12}{2^4} > 0$

Dus in B afnemend dalend.

$f'(4) = \dfrac{7}{5^3} > 0$ en $f''(4) = \dfrac{-6}{5^4} < 0$

Dus in C afnemend stijgend.

161 Volgens de omgekeerde stelling van Thales is het middelpunt van de omgeschreven cirkel het midden van BC.



Noem de straal van de cirkel r.

Dan moet gelden $\pi r^2 = 36\pi$

$r^2 = 36$

$r = 6$

Dus $BC = 12$.

$\sin(30°) = \dfrac{AC}{12}$ geeft $AC = 12\sin(30°) = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

$\cos(30°) = \dfrac{AB}{12}$ geeft $AB = 12\cos(30°) = 12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

De omtrek van driehoek ABC is $12 + 6 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3}$.

162 $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, 2
$y = \sin(\frac{1}{2}x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, -2)$
$y = -2 + \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\pi))$
Dus $f(x) = -2 + \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi)$.

Bladzijde 243

163 $A = 12 - 3\sqrt{1 - 2B}$
$3\sqrt{1 - 2B} = 12 - A$
kwadrateren geeft
$9(1 - 2B) = 144 - 24A + A^2$
$9 - 18B = 144 - 24A + A^2$
$-18B = A^2 - 24A + 135$
$B = -\frac{1}{18}A^2 + 1\frac{1}{3}A - 7\frac{1}{2}$

164 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x + b$ geeft $f'(x) = x^2 - 2ax + 4$ en $f''(x) = 2x - 2a$.
$f''(x) = 0$ geeft $2x - 2a = 0$
$2x = 2a$
$x = a$
Er moet gelden $f'(a) = \text{rc}_k$.
$f'(a) = -5$ geeft $a^2 - 2a \cdot a + 4 = -5$
$a^2 - 2a^2 = -9$
$-a^2 = -9$
$a^2 = 9$
$a = 3 \vee a = -3$
$f_3(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = b - 6$
$\left.\begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (3, b - 6) \end{array}\right\} b - 6 = -5 \cdot 3 + 2$
$b = -15 + 2 + 6 = -7$
$f_{-3}(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot -3 + b = b + 6$
$\left.\begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (-3, b + 6) \end{array}\right\} b + 6 = -5 \cdot -3 + 2$
$b = 15 + 2 - 6 = 11$
Dus $a = 3$ en $b = -7$ of $a = -3$ en $b = 11$.

165 $-\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x + 1\frac{1}{3}\pi) = \sin(2x + 1\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 1\frac{5}{6}\pi)$

166 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 8 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus middelpunt $M(-2, 3)$ en straal $r = \sqrt{5}$.
$d(A, M) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

167 $e^{2x} - 6\,e^{x+1} + 5\,e^2 = 0$
$(e^x)^2 - 6e \cdot e^x + 5\,e^2 = 0$
$(e^x - e)(e^x - 5e) = 0$
$e^x = e \vee e^x = 5e$
$x = 1 \vee x = \ln(5e)$
$x = 1 \vee x = 1 + \ln(5)$

© Noordhoff Uitgevers bv

168 $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t^2 - 4t - 6 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$

Evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$2t = 0 \wedge 2t^2 - 4t - 6 \neq 0$$
$$t = 0$$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -4)$.

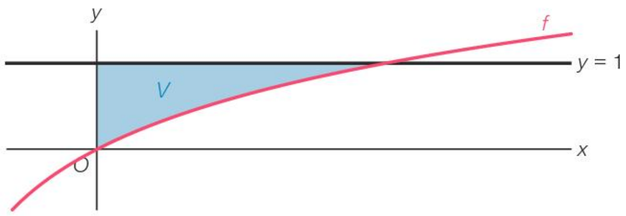
Evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$2t^2 - 4t - 6 = 0 \wedge 2t \neq 0$$
$$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$$
$$(t + 1)(t - 3) = 0 \wedge t \neq 0$$
$$t = -1 \vee t = 3$$

$t = -1$ geeft het punt $(3\frac{1}{3}, -3)$ en $t = 3$ geeft het punt $(-18, 5)$.

169 $y = \ln(\frac{1}{2}x + 1)$ geeft $\ln(\frac{1}{2}x + 1) = y$

$$\tfrac{1}{2}x + 1 = \mathrm{e}^y$$
$$\tfrac{1}{2}x = \mathrm{e}^y - 1$$
$$x = 2\,\mathrm{e}^y - 2$$



$$I(L) = \pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (2\,\mathrm{e}^y - 2)^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (4\,\mathrm{e}^{2y} - 8\,\mathrm{e}^y + 4)\,\mathrm{d}y = \pi\left[2\,\mathrm{e}^{2y} - 8\,\mathrm{e}^y + 4y\right]_0^1$$
$$= \pi(2\,\mathrm{e}^2 - 8\mathrm{e} + 4) - \pi(2 - 8 + 0) = (2\,\mathrm{e}^2 - 8\mathrm{e} + 10)\pi$$

170 $k\colon x + 7y = 21$ oftewel $k\colon x = 21 - 7y$

Stel $M(21 - 7p, p)$.

$d(M, l) = d(M, m)$ geeft $\dfrac{|21 - 7p + 2p - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2(21 - 7p) - p - 2|}{\sqrt{5}}$

$$|20 - 5p| = |42 - 14p - p - 2|$$
$$|20 - 5p| = |40 - 15p|$$
$$20 - 5p = 40 - 15p \vee 20 - 5p = -40 + 15p$$
$$10p = 20 \vee -20p = -60$$
$$p = 2 \vee p = 3$$

$p = 2$ geeft $M_1(7, 2)$ en $r_1 = d(M_1, l) = \dfrac{|7 + 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$p = 3$ geeft $M_2(0, 3)$ en $r_2 = d(M_2, l) = \dfrac{|0 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Dus $c_1\colon (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 20$ en $c_2\colon x^2 + (y - 3)^2 = 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

FSC www.fsc.org MIX Papier van verantwoorde herkomst FSC® C118189

0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73725-2

UITWERKINGEN | WISKUNDE B | 12E EDITIE | VWO DEEL 4

GEPERSONALISEERD LEREN

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
www.fsc.org

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73725-2